Zestaw 13

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Kogut kosztuje 5 monet, kura 3 monety, a za jedną monetę można kupić 3 kurczęta. Za 100 monet kupiono 100 ptaków. Ile było wśród nich kogutów, kur i kurcząt?

Moglibyśmy sprawdzać wszystkie możliwości, ale to kosztowałoby sporo pracy. Zobaczmy, czy nie dałoby się ograniczyć sprawdzania do kilku przypadków.
Oznaczmy koguty przez x, kury przez y a kurczęta przez z. Z warunków zadania dostajemy układ równań:

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 5x + 3y + \frac{1}{3}z = 100 \end{cases}$$

Pomnóżmy drugie równanie przez 3:

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 15x + 9y + z = 300 \end{cases}$$

Teraz odejmijmy stronami pierwsze równanie od drugiego:

$$14x + 8y = 200$$
$$7x + 4y = 100$$
$$7x = 100 - 4y$$

W ostatnim równaniu prawa strona jest podzielna przez 4, więc lewa też musi być, a to oznacza, że liczba kogutów jest podzielna przez 4. Wystarczy więc sprawdzić warunki zadania dla $x = 0, 4, 8, 12, 16$, (przy $x = 20$ za same koguty damy 100 monet). Liczbę kur obliczmy z warunku

$$4y = 100 - 7x$$

Resztę będą stanowić kurczęta.

Mamy cztery rozwiązania:

$$x = 0, y = 25, z = 75$$
$$x = 4, y = 18, z = 78$$
$$x = 8, y = 11, z = 81$$
$$x = 12, y = 4, z = 84$$

2. Rozstrzygnij, czy istnieje taka liczba rzeczywista x, dla której liczby $x+\sqrt{2}$ i $x^2+\sqrt{2}$ są wymierne.

Istnieje, jest to $\frac{1}{2}-\sqrt{2}$.

Niech $x+\sqrt{2}=k$ i $x^2+\sqrt{2}=l$, $k,l \in W$. Wówczas $x=k-\sqrt{2}$. Wstawiamy to do drugiego równania $\left(k-\sqrt{2}\right)^2+\sqrt{2}=l$ i dalej

$$k^2-2k\sqrt{2}+2+\sqrt{2}=l$$
$$k^2+2-\sqrt{2}(2k-1)=l$$

Równość może zajść tylko, gdy $(2k-1)=0$, czyli $k=\frac{1}{2}$, a $x=\frac{1}{2}-\sqrt{2}$.

3. Dane są nieujemne liczby wymierne a i b. Udowodnij, że jeżeli suma $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ jest wymierna, to każda z liczb $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ jest wymierna.

Niech $\sqrt{a}+\sqrt{b}=w$. Jeżeli $w=0$, to $\sqrt{a}=0$ i $\sqrt{b}=0$ i teza zachodzi.
Załóżmy, że $w \neq 0$. Wówczas:

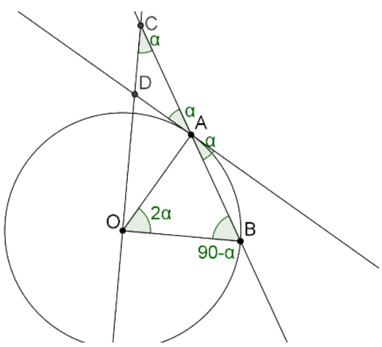
$$\sqrt{a}=w-\sqrt{b}$$
$$a=w^2-2w\sqrt{b}+b$$
$$\sqrt{b}=\frac{w^2+b-a}{2w}$$

czyli $\sqrt{b}$ jest liczbą wymierną. $\sqrt{a}$ jest wymierny, bo $\sqrt{a}=w-\sqrt{b}$.

KLASY TRZECIE I CZWARTE

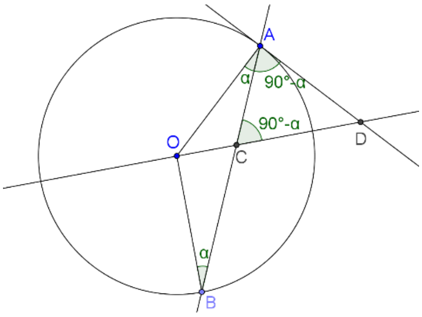
1. Na okręgu o środku O obrano punkt A, przez który poprowadzono styczną do okręgu oraz sieczną przecinającą okrąg w punkcie B. Sieczna okręgu przechodząca przez jego środek i prostopadła do odcinka OB przecina sieczną AB w punkcie C, a styczną w punkcie D. Wykaż, że trójkąt ACD jest równoramienny.

Pierwszy przypadek:



Oznaczmy przez α kąt CAD. Kąt do niego wierzchołkowy jest kątem dopisanym opartym na tym samym łuku, co kąt AOB i dlatego miara kąta AOB wynosi 2α. Trójkąt AOB jest trójkątem równoramiennym, łatwo więc policzyć miarę kąta ABO, wynosi ona $90° - \alpha$. Trójkąt OBC jest prostokątny, więc kąt OCB ma miarę α. Trójkąt ACD jest równoramienny, bo ma dwa takie same kąty.

Drugi przypadek:



Oznaczmy przez α każdy z kątów OBC i OAC. Trójkąt OCB jest z założenia prostokątny, więc kąt OCB, a co za tym idzie kąt ACD ma miarę $90° - \alpha$. Kąt OAD jest prosty jako kąt między styczną a promieniem, więc kąt CAD również ma miarę $90° - \alpha$.

2. Wykaż, że dla dowolnej liczby całkowitej n większej od 3 iloczyn liczby utworzonej z ostatniej cyfry liczby 2^n i liczby utworzonej przez pozostałe cyfry tej liczby jest zawsze podzielny przez 6.

Potęgi dwójki mogą mieć następującą postać:
a) $2^{4k} = 10a + 6$
b) $2^{4k+1} = 10b + 2$
c) $2^{4k+2} = 10c + 4$
d) $2^{4k+3} = 10d + 8$

Ad a) Cyfrą jedności jest 6. Iloczyn $6 \cdot a$ jest podzielny przez 6.
Ad b) Liczby postaci 2^{4k+1} dają resztę 2 przy dzieleniu przez 3. Liczba $10b = 2^{4k+1} - 2$ jest więc podzielna przez 3, co gwarantuje, że iloczyn $2 \cdot b$ jest podzielny przez 6.
Ad c) Liczby postaci 2^{4k+2} dają resztę 1 przy dzieleniu przez 3. Liczba $10c = 2^{4k+2} - 4$ jest więc podzielna przez 3, co gwarantuje, że iloczyn $4 \cdot c$ jest podzielny przez 6.
Ad d) Liczby postaci 2^{4k+3} dają resztę 2 przy dzieleniu przez 3. Liczba $10d = 2^{4k+3} - 8$ jest więc podzielna przez 3, co gwarantuje, że iloczyn $8 \cdot d$ jest podzielny przez 6.

3. Znajdź najmniejszą taką liczbę naturalną n, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej k liczba $n + 2^k$ ma co najmniej dwa różne dzielniki pierwsze.

Pokażemy, że dla liczb 1,…, 9 nie wychodzi

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n + 2^k$	$1+2$	$2+2$	$3+2$	$4+2^2$	$5+2$	$6+2$	$7+2$	$8+2^3$	$9+2$
dzielniki pierwsze	3	2	5	2	7	2	3	2	11

Warunki zadania spełnia dopiero liczba 10

$$10 + 2^k = 2(5 + 2^{k-1})$$

Dla $k = 1$ dostajemy liczbę 12, która ma dwa dzielniki pierwsze: 2 i 3. Dla $k > 1$ mamy iloczyn dwójki i liczby nieparzystej, który dzieli się przez dwa i ma co najmniej jeden nieparzysty dzielnik pierwszy.