



Zestaw 19

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Przez $[x]$ oznaczamy największą liczbę całkowitą nie większą od x . Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n liczba

$$\left[\frac{n+4}{2} \right] + 3n - 2 \cdot (-1)^n$$

jest podzielna przez 7.

2. Rozwiąż równanie

$$[x] = \frac{2x \cdot \{x\}}{x + \{x\}}$$

gdzie $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od x , a $\{x\} = x - [x]$.

3. Na globusie w kształcie kuli o promieniu R zakreślono cyrklem o rozwarości R okrąg (nóżkę cyrkla umieszczono na biegunie). Jaka jest długość narysowanego równoleżnika?

KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n liczba $4^n + 15n - 1$ jest podzielna przez 9.

2. Wykaż, że $n > 1$ różnych okręgów dzieli płaszczyznę na co najwyżej $n^2 - n + 2$ obszarów.

3. Udowodnij, że dla $n \geq 7$ możemy tak umieścić w wierzchołkach n -kąta foremnego różne liczby od 1 do n , by wartość bezwzględna różnicy liczb z każdych dwóch sąsiednich wierzchołków była kwadratem liczby naturalnej.