Zestaw 15

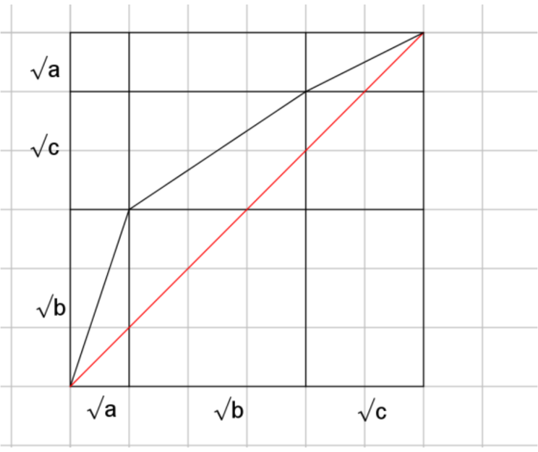
KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Udowodnij, ze dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi nierówność $\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a} \geq \sqrt{2a}+\sqrt{2b}+\sqrt{2c}$

Zapiszmy naszą nierówność tak:

$$\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a} \geq \sqrt{2}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)$$

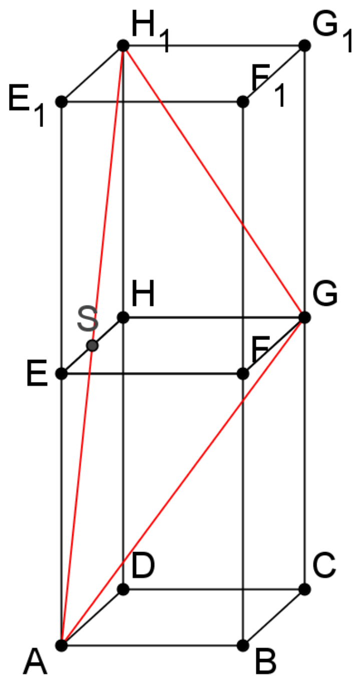
Narysujmy teraz kwadrat o boku $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$:



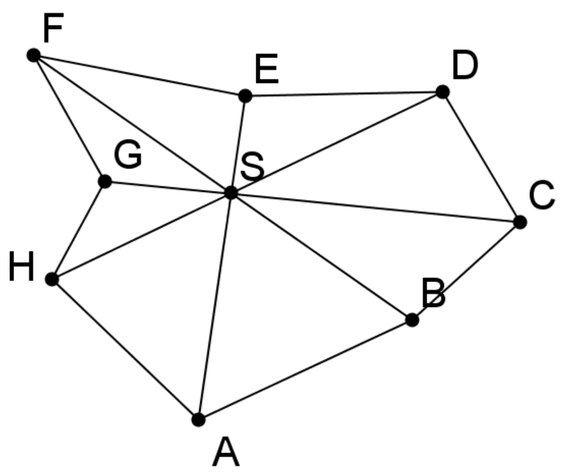
$\sqrt{a+b}$ to długość przekątnej prostokąta o bokach $\sqrt{a}$ i $\sqrt{b}$. Podobnie dla $\sqrt{b+c}$ i $\sqrt{c+a}$. Lewa strona nierówności reprezentowana jest więc przez czarną łamaną, a prawa to czerwona przekątna kwadratu. Wystarczy teraz zastosować uogólnioną nierówność trójkąta.

2. Dany jest prostopadłościan ABCDEFGH o podstawie ABCD i krawędziach bocznych AE, BF, CG, DH. Punkt S jest środkiem krawędzi EH. Udowodnij, że z odcinków o długościach $AG, CH, 2 \cdot AS$ *można zbudować trójkąt.*

Oto nasz trójkąt:



3. W ośmiokącie wszystkie przekątne mają długość 1 i przecinają się w jednym punkcie. Udowodnij, że obwód tego ośmiokąta jest mniejszy niż 8.



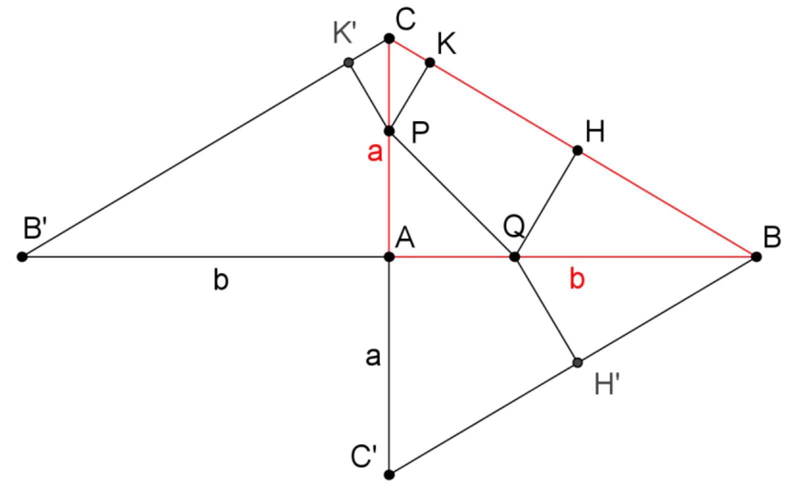
Oznaczmy przez S punkt przecięcia przekątnych. Z nierówności trójkąta wynika że:

$$AB < AS + SB$$
$$EF < 1 - AS + 1 - SB$$

Po dodaniu stronami $AB + EF < 2$. Podobnie udowodnimy, że $BC + FG < 2$, $CD + GH < 2$ oraz $DE + HA < 2$ a z tego już wynika teza zadania.

KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości odpowiednio a i b. Na pierwszej z tych przyprostokątnych wybrano punkt P, a na drugiej punkt Q. Niech K i H będą rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów P i Q na przeciwprostokątną. Jaka jest najmniejsza możliwa wartość sumy $|KP| + |PQ| + |QH|$? Odpowiedź uzasadnij.



Wykażemy, że najmniejsza możliwa wartość interesującej nas sumy wynosi $\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Oznaczmy wierzchołki naszego trójkąta przez A, B, C, jak na rysunku powyżej. Przekształćmy trójkąt ABC w symetrii względem prostej AB i oznaczmy przez H' obraz punktu H, oraz w symetrii względem prostej AC i oznaczmy przez K' obraz punktu K. Wówczas $|KP| + |PQ| + |QH| = |K'P| + |PQ| + |QH'|$. Długość łamanej $K'PQH'$ jest większa lub równa od odległości między odcinkami $B'C$ i $C'B$ (które oczywiście są równoległe), a ta odległość jest równa podwojonej wysokości trójkąta ABC opuszczonej na przeciwprostokątną czyli $\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

2. Mamy 17 liczb rzeczywistych. Wiadomo, że suma dowolnych dziewięciu spośród tych liczb jest większa od sumy pozostałych ośmiu. Wykaż, że wszystkie te liczby są dodatnie.

Oznaczmy nasze liczby przez $a_1, a_2, \dots, a_{17}$. Z warunków zadania wynika, że:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 > a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} + a_{16} + a_{17}$$

oraz

$$a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} + a_{16} + a_{17} > a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8$$

Dodając te nierówności stronami i redukując wyrazy podobne dostajemy:

$$2a_9 > 0$$

czyli

$$a_9 > 0$$

W podobny sposób pokażemy, że wszystkie pozostałe liczby są większe od 0.

3. Wyznacz wszystkie liczby całkowite nieujemne n, dla których liczba $7^n + 2 \cdot 4^n$ jest liczbą pierwszą.

Dla $n = 0$ otrzymujemy liczbę pierwszą 3. Dla $n > 0$ otrzymujemy liczbę większą od 3 i podzielną przez 3, bo zarówno wszystkie naturalne potęgi siódemki, jak i wszystkie naturalne potęgi czwórki przystają do 1 modulo 3. Jedynym rozwiązaniem jest więc $n = 0$.