



## Zestaw 17

---

### KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Znajdź wszystkie trójki liczb całkowitych nieujemnych  $a, b, c$  spełniające układ równań:

$$\begin{cases} a + bc = 3b \\ b + ca = 3c \\ c + ab = 3a \end{cases}$$

Pierwsze równanie możemy zapisać tak:

$$a = 3b - bc$$

$$a = b(3 - c)$$

Ponieważ  $a$  i  $b$  są liczbami nieujemnymi, więc również nieujemna musi być liczba  $3 - c$ . W takim razie  $c = 0$  lub  $c = 1$  lub  $c = 2$ . Dla  $c = 0$  dostajemy rozwiązanie  $(0, 0, 0)$ , dla  $c = 1$  dostajemy sprzeczność a dla  $c = 2$  dostajemy rozwiązanie  $(2, 2, 2)$

2. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} a^2 + 24 = 9b + \frac{a + c}{2} \\ b^2 + 24 = 9c + \frac{b + a}{2} \\ c^2 + 24 = 9a + \frac{c + b}{2} \end{cases}$$

W treści zadania wkradł się błąd. Układ miał wyglądać tak:

$$\begin{cases} a^2 + 24 = 9b + \frac{a + c}{2} \\ b^2 + 25 = 9c + \frac{b + a}{2} \\ c^2 + 26 = 9a + \frac{c + b}{2} \end{cases}$$

I wtedy byłby znacznie łatwiejszy do rozwiązania.

Układ, który się znalazł w zestawie ma rozwiązania (4, 4, 4) i (6, 6, 6). Dawałem dwa punkty, gdy ktoś wskazał obydwa te rozwiązania. Należałoby jeszcze udowodnić, że nie ma więcej rozwiązań, lub wskazać inne rozwiązania, jeśli takowe są.

Przepraszam za pomyłkę w treści zadania.

3. Ile dzielników ma liczba  $2^2 \cdot 3^5 + 2 \cdot 3^6 + 2^3 \cdot 3^7$ ?

Wyłączamy  $3^5$  przed nawias i przedstawiamy naszą liczbę w postaci iloczynu liczb pierwszych:

$$3^5(2^2 + 2 \cdot 3 + 2^3 \cdot 3^2) = 3^5 \cdot 82 = 2 \cdot 3^5 \cdot 41$$

Aby policzyć dzielniki zauważamy, że każdy dzielnik naszej liczby ma w rozkładzie na czynniki pierwsze liczbę 2 w potęgę 0 lub 1 (a więc na dwa sposoby), liczbę 3 w potęgach od 0 do 5 (więc na sześć sposobów) i 41 w potęgę 0 lub 1 (na dwa sposoby). W sumie możliwości utworzenia dzielników naszej liczby jest  $2 \cdot 6 \cdot 2$  czyli 24.

## KLASY TRZECIE

1. Uzasadnij, że dla dowolnej liczby naturalnej  $n$ :

$$(n + 1)(n + 2)(n + 3) \cdot \dots \cdot 2n = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n - 1)$$

Wyrażenie  $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n - 1)$  możemy zapisać tak:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n - 1) &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n - 1) \cdot 2n}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} \\ &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \cdot (n + 1) \cdot \dots \cdot (2n - 1) \cdot 2n}{2^n (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n)} \\ &= \frac{(n + 1)(n + 2)(n + 3) \cdot \dots \cdot (2n - 1) \cdot 2n}{2^n} \end{aligned}$$

To, co otrzymaliśmy wstawiamy do prawej strony naszej równości:

$$2^n \cdot \frac{(n + 1)(n + 2)(n + 3) \cdot \dots \cdot (2n - 1) \cdot 2n}{2^n} = (n + 1)(n + 2)(n + 3) \cdot \dots \cdot 2n$$

i otrzymaliśmy lewą stronę, więc równość jest udowodniona.

2. Wiadomo, że liczba  $a$  jest  $n$  razy większa od liczby  $b$ , a suma liczb  $a$  i  $b$  jest  $m$  razy większa od ich różnicy. Znaleźć sumę  $m + n$ , wiedząc, że  $m$  i  $n$  należą do liczb naturalnych.

$$a = nb$$

$$nb + b = m(nb - b)$$

$$nb + b = mnb - mb$$

$$n + 1 = mn - m$$

$$mn - m - n - 1 = 0$$

$$m(n - 1) - (n - 1) = 2$$

$$(m - 1)(n - 1) = 2$$

Mamy więc:

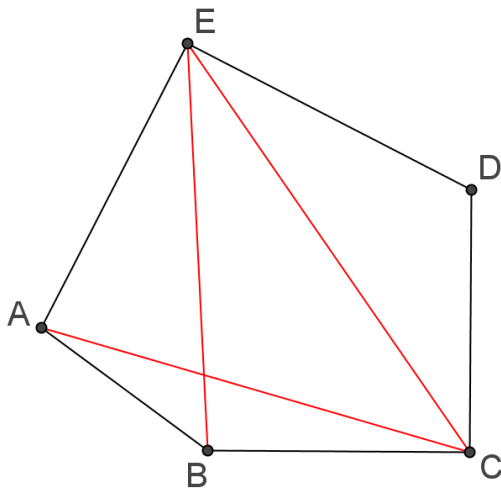
$$\begin{cases} m - 1 = 1 \\ n - 1 = 2 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} m - 1 = 2 \\ n - 1 = 1 \end{cases}$$

Wystarczy teraz dodać otrzymane równości stronami. W obydwu przypadkach otrzymujemy  $m + n = 5$

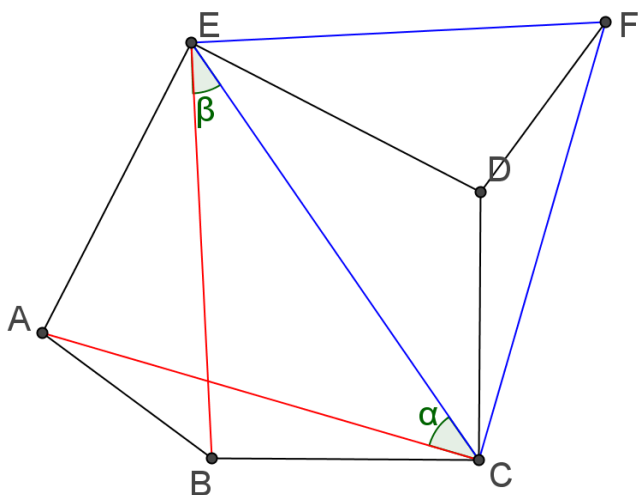
W sytuacji, gdy ktoś wyliczył, że  $m + n = \frac{a^2 + b^2}{b(a-b)}$  nie zaliczałem zadania, bo ten wynik sugeruje, że suma  $m + n$  jest zależna od  $a$  i  $b$ .

3. Dany jest pięciokąt wypukły  $ABCDE$ , w którym  $BC = CD$ ;  $DE = EA$ ;  $\sphericalangle BCD = \sphericalangle DEA = 90^\circ$ . Wykaż, że z odcinków o długościach  $AC$ ,  $CE$ ,  $EB$  można zbudować trójkąt oraz wyznacz miary jego kątów, znając miarę  $\alpha$  kąta  $ACE$  i miarę  $\beta$  kąta  $BEC$ .

Oto nasz pięciokąt:



Obróćmy trójkąt  $ABC$  o  $-90^\circ$  wokół punktu  $C$ . Wówczas obrazem punktu  $B$  będzie punkt  $D$ , a obrazem punktu  $A$  – punkt  $F$ . Następnie obracamy trójkąt  $ABE$  o  $90^\circ$  wokół punktu  $E$ . Obrazem punktu  $A$  jest punkt  $D$ , a obrazem punktu  $B$  – punkt  $F$  (to, że punkt  $B$  wyląduje też w punkcie  $F$  wynika z faktu, że suma kątów  $EDC$ ,  $CBA$  i  $BAE$  wynosi  $360^\circ$ ). Szukanym trójkątem jest więc trójkąt  $CEF$ .



Obliczmy jego kąty. Kąt  $ECF$  ma miarę  $90^\circ - \alpha$ , kąt  $CEF$ :  $90^\circ - \beta$ , a kąt  $CFE$ :  
 $180^\circ - (90^\circ - \alpha) - (90^\circ - \beta) = \alpha + \beta$