Zestaw 18

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Operacją nazwiemy przyporządkowanie trójce liczb (a, b, c) *nowej trójki liczb* $(b + c, c + a, a + b)$. *Po wykonaniu 2026 takich operacji na otrzymywanych trójkach liczb, startując od trójki* $(1, 3, 5)$ *otrzymano* (x, y, z). *Ile wynosi różnica* $x - y$*?*

Po wykonaniu operacji na liczbach (a, b, c) różnica między pierwszą a drugą liczbą otrzymanej trójki wynosi $(b + c) - (c + a) = b - a$ czyli jest liczbą przeciwną do $a - b$. W naszym przypadku będziemy więc cały czas otrzymywali na przemian -2 i 2. Po 2026 operacjach będzie to -2.

2. Rozwiąż układ równań

$$ab = 1 \quad bc = 2 \quad cd = 3 \quad de = 4 \quad ea = 5$$

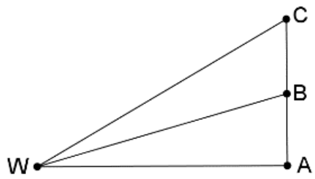
Rozwiążemy ten układ metodą podstawiania.

$b = \frac{1}{a},\ \frac{1}{a} \cdot c = 2,\ \ c = 2a, 2ad = 3,\ d = \frac{3}{2a},\ \frac{3}{2a} \cdot e = 4,\ e = \frac{8a}{3}, \frac{8a}{3} \cdot a = 5,\ a^2 = \frac{15}{8}$

$a = \frac{\sqrt{30}}{4},\ b = \frac{4}{\sqrt{30}}\ ,\quad c = \frac{\sqrt{30}}{2}\ ,\quad d = \frac{6}{\sqrt{30}}\ ,\quad e = \frac{2\sqrt{30}}{3}$

lub $a = -\frac{\sqrt{30}}{4},\ b = -\frac{4}{\sqrt{30}}\ ,\quad c = -\frac{\sqrt{30}}{2}\ ,\quad d = -\frac{6}{\sqrt{30}}\ ,\quad e = -\frac{2\sqrt{30}}{3}$

3. Punkty W, A, B, C są położone na płaszczyźnie tak, jak na rysunku obok (punkty A, B, C są współliniowe, kąt WAC jest prosty). Z punktów A, B i C widać wierzchołek wieży, której podstawa znajduje się w punkcie W odpowiednio pod kątami 60°, 45°, 30°. Wykaż, że AB = BC.



Przyjmijmy, że wieża ma wysokość 1. Wówczas, korzystając z własności trójkątów 30°, 60°, 90° i 45°, 45°, 90° dostajemy, że $AW = \frac{\sqrt{3}}{3}, BW = 1, CW = \sqrt{3}$. Teraz korzystając z twierdzenia Pitagorasa obliczymy, że $AC = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, AB = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, czyli faktycznie B jest środkiem odcinka AC.

KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Dany jest trójkąt ABC o polu równym 1, w którym długości boków spełniają nierówności: $a \geq b \geq c$. *Udowodnij, że* $b \geq \sqrt{2}$.

$$1 = P = \frac{1}{2} ab \sin\gamma \leq \frac{1}{2} b^2 \sin\gamma \leq \frac{1}{2} b^2$$

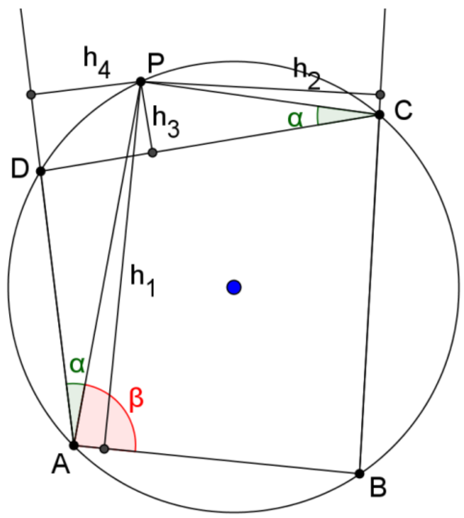
Z nierówności $1 \leq \frac{1}{2}b^2$dostajemy $b \geq \sqrt{2}$.

2. W trójkącie ABC CD jest dwusieczną. Udowodnij, że $CD^2 = ab\left(1 - \frac{c^2}{(a+b)^2}\right)$.

Skorzystamy z twierdzenia Stewarta, które mówi, że przy oznaczeniach $a = BC$, $b = AC, c = AB, d = CD, p = AD, q = BD,\ d^2 = \frac{a^2p+b^2q}{c} - pq$.
Potrzebujemy obliczyć AD i BD. Tu pomoże twierdzenie o dwusiecznej. Przyjmując $p = AD$ i $c - p = BD$ dostajemy $\frac{p}{c-p} = \frac{b}{a}$. Stąd wyliczamy, że $p = \frac{bc}{a+b}$ oraz $c - p = \frac{ac}{a+b}$. Podstawiając otrzymane wartości do twierdzenia Stewarta dostajemy:

$$CD^2 = \frac{a^2\frac{bc}{a+b} + b^2\frac{ac}{a+b}}{c} - \frac{bc}{a+b}\cdot\frac{ac}{a+b} = \frac{a^2bc + b^2ac}{c(a+b)} - \frac{abc^2}{(a+b)^2}$$
$$= \frac{abc(a+b)}{c(a+b)} - \frac{abc^2}{(a+b)^2} = ab - \frac{abc^2}{(a+b)^2} = ab\left(1 - \frac{c^2}{(a+b)^2}\right)$$

3. Czworokąt ABCD wpisany jest w okrąg. Na tym okręgu leży punkt P. Udowodnić, że iloczyn odległości punktu P od prostych AB i CD jest równy iloczynowi odległości punktu P od prostych BC i DA.



Oznaczmy odległości punktu P od prostych AB, BC, CD i DA przez h_1, h_2, h_3, h_4. [XYZ] oznacza pole trójkąta XYZ.

$$h_1h_3 = \frac{2[ABP]}{AB}\cdot\frac{2[CDP]}{CD} = \frac{AB\cdot AP\cdot\sin\beta}{AB}\cdot\frac{CD\cdot PC\cdot\sin\alpha}{CD} = AP\cdot PC\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

$$h_2h_4 = \frac{2[BCP]}{BC}\cdot\frac{2[ADP]}{AD} = \frac{BC\cdot PC\cdot\sin(180^\circ - \beta)}{BC}\cdot\frac{AD\cdot AP\cdot\sin\alpha}{AD}$$
$$= AP\cdot PC\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta$$