Zestaw 19

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Przez [x] oznaczamy największą liczbę całkowitą nie większą od x. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n liczba

$$\left[\frac{n+4}{2}\right]+3n-2\cdot(-1)^n$$

jest podzielna przez 7.

Rozważymy dwa przypadki: n parzyste i n nieparzyste.

a) $n=2k$

$$\left[\frac{2k+4}{2}\right]+3\cdot 2k-2\cdot 1=k+2+6k-2=7k$$

b) $n=2k+1$

$$\left[\frac{2k+1+4}{2}\right]+3\cdot(2k+1)-2\cdot(-1)=k+2+6k+3+2=7k+7=7(k+1)$$

2. Rozwiąż równanie

$$[x]=\frac{2x\cdot\{x\}}{x+\{x\}}$$

gdzie $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od x, a $\{x\}=x-[x]$.

Ponieważ $x=[x]+\{x\}$ nasze równanie możemy zapisać tak:

$$[x]=\frac{2([x]+\{x\})\cdot\{x\}}{[x]+\{x\}+\{x\}}$$
$$[x]^2+2[x]\{x\}=2[x]\{x\}+2\{x\}^2$$
$$[x]^2=2\{x\}^2$$

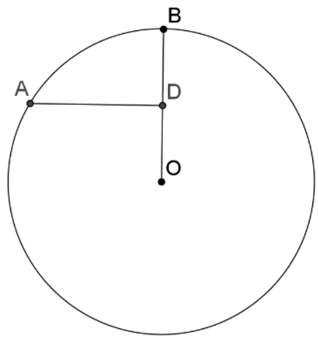
Z powyższego wynika, że liczba $2\{x\}^2$ jest całkowita. Ponieważ mantysa z liczby należy do przedziału $[0,1)$, $2\{x\}^2$ może się równać 0 lub 1. Rozważmy dwa przypadki:

1) $\{x\}=0$, wówczas z równania $[x]^2=2\{x\}^2$ dostajemy $[x]=0$ i ostatecznie $x=0$. To rozwiązanie musimy odrzucić, bo wówczas w wyjściowym równaniu dostalibyśmy dzielenie przez 0.

2) $2\{x\}^2=1$, wówczas $\{x\}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, a $[x]=1$ lub $[x]=-1$.

Ostatecznie dostajemy dwa rozwiązania $x_1 = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, x_2 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

3. Na globusie w kształcie kuli o promieniu R zakreślono cyrklem o rozwartości R okrąg (nóżkę cyrkla umieszczono na biegunie). Jaka jest długość narysowanego równoleżnika?



Wbijamy cyrkiel w punkt B, wówczas punkt A leży na interesującym nas równoleżniku. Promień równoleżnika jest równy wysokości trójkąta równobocznego OBA (odcinek AD) czyli ma długość $\frac{R\sqrt{3}}{2}$. Równoleżnik ma więc długość $\sqrt{3}\pi R$.

KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n liczba $4^n + 15n - 1$ jest podzielna przez 9.

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

Dla $n = 1$ mamy $4 + 15 - 1 = 18$, jest podzielne przez 9

Zakładamy, że $4^n + 15n - 1$ jest podzielne przez 9 i badamy liczbę $4^{n+1} + 15(n+1) - 1$

$$4^{n+1} + 15(n+1) - 1 = 4 \cdot 4^n + 15n + 15 - 1 = 4(4^n + 15n - 1) - 45n + 18$$

co jest podzielne przez 9, bo $4^n + 15n - 1$ jest podzielne przez 9 z założenia indukcyjnego, a $45n$ i 18 w oczywisty sposób również są podzielne przez 9.

2. Wykaż, że $n > 1$ różnych okręgów dzieli płaszczyznę na co najwyżej $n^2 - n + 2$ obszarów

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

Dla $n = 1$ mamy dwa obszary i $1^2 - 1 + 2 = 2$

Załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla n okręgów. Dorysowujemy kolejny okrąg. Przecina on każdy z istniejących okręgów w co najwyżej dwóch punktach. Oznacza to, że powstaje co najwyżej $2n$ nowych obszarów. Mamy więc teraz nie więcej niż $n^2 - n + 2 + 2n$ obszarów.

$$n^2 - n + 2 + 2n = n^2 + 2n + 1 - n - 1 + 2 = (n+1)^2 - (n+1) + 2$$

Czyli działa.

3. Udowodnij, że dla $n \geq 7$ możemy tak umieścić w wierzchołkach n-kąta foremnego różne liczby od 1 do n, by wartość bezwzględna różnicy liczb z każdych dwóch sąsiednich wierzchołków była kwadratem liczby naturalnej.

Przeprowadzimy indukcję o głębokości 3.

Rozkładajmy nasze liczby tak, żeby obok siebie stały liczby największa i i druga co do wielkości. Dla $n = 7$ umieszczamy w wierzchołkach siedmiokąta kolejno liczby 1, 2, 6, 7, 3, 4, 5. W wierzchołkach ośmiokąta 1, 2, 3, 4, 8, 7, 6, 5, a w wierzchołkach dziewięciokąta 1, 2, 6, 7, 3, 4, 8, 9, 5. W każdym przypadku wartość bezwzględna różnicy dwóch kolejnych liczb wynosi 1 lub 4.
Załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla liczb: $n-2, n-1, n$ i spełnione jest dodatkowe założenie, że liczba największa i druga co do wielkości stoją obok siebie. W $(n-2)-$ kącie wstawmy między liczby $n-3$ i $n-2$ kolejno liczby $n+1, n, n-1$. W ten sposób otrzymamy żądany rozkład dla $(n+1)-$ kąta.