Zestaw 20

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Wyznacz wszystkie trójki (x, y, z) *liczb całkowitych spełniające układ równań*

$$\begin{cases} x - yz = 1 \\ xz + y = 2 \end{cases}$$

Podnieśmy oba równania obustronnie do kwadratu i od drugiego odejmijmy pierwsze:

$$\begin{cases} x^2 - 2xyz + y^2z^2 = 1 \\ x^2z^2 + 2xyz + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$x^2z^2 - x^2 - y^2z^2 + y^2 = 3$$

$$x^2(z^2 - 1) - y^2(z^2 - 1) = 3$$

$$(x^2 - y^2)(z^2 - 1) = 3$$

Badając różne możliwe rozkłady liczby 3 na iloczyn liczb całkowitych stwierdzamy, że mamy następujące trójki $(x, y\ z)$: (1, 0, 2), (1, 0, -2), (-1, 0, 2), (-1, 0, -2), (1, 2, 0), (1, -2, 0), (-1,2, 0), (-1, -2, 0). Po wykonaniu sprawdzenia z wyjściowymi równaniami zostają dwie trójki (1, 0, 2) oraz (1, 2, 0)

2. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n *liczba* $n^3 + 2n$ *jest podzielna przez 3.*

$$n^3 + 2n = n(n^2 + 2)$$

Jeśli n jest podzielne przez 3 to oczywiście wszystko gra. Jeśli n nie jest podzielne przez 3 to n^2 daje resztę 1 z dzielenia przez 3 (była o tym mowa na kółku o wyrażeniach algebraicznych), a wtedy $(n^2 + 2)$ jest podzielne przez 3.

3. Wujek Antoni złowił pewną liczbę ryb. Trzy największe spośród nich dał cioci Halinie, w wyniku czego waga złowionych ryb zmalała o 35%. Następnie trzy najmniejsze ryby dał sąsiadowi, zmniejszając wagę pozostałych ryb o $\frac{5}{13}$*. Ile ryb złowił wujek Antoni?*

Niech waga złowionych ryb wynosi x. Łatwo policzyć, że średnia waga ryb podarowanych cioci Halinie wynosi $\frac{7}{60}x$, a średnia waga ryb podarowanych sąsiadowi $\frac{5}{60}x$. Obliczymy wagę pozostałych ryb:

$$\frac{8}{13} \cdot \frac{65}{100}x = 0{,}4x$$

Tych ryb musiało być 4, bo gdyby było więcej, byłyby średnio mniejsze od ryb podarowanych sąsiadowi, a gdyby było mniej, byłyby średnio większe od ryb podarowanych cioci Helenie. Ryb było więc w sumie 10.

KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Znajdź wszystkie pary (m, n) liczb całkowitych dodatnich spełniające równanie $2 \cdot 3^m = 7n + 5$.

Mamy rozstrzygnąć, dla jakich liczb m liczba $2 \cdot 3^m$ daje resztę 5 z dzielenia przez 7. Przy pomocy kongruencji sprawdzamy, że zachodzi to dla m dających resztę 3 z dzielenia przez 6. Ostatecznie dostajemy $(m, n) = \left(6k + 3, \frac{2 \cdot 3^{6k+3} - 5}{7}\right)$

2. Znajdź wszystkie liczby całkowite dodatnie n, dla których cyfrą jedności liczby $4^n + 7^n$ jest 5.

Liczba $4^n + 7^n$ jest nieparzysta, wystarczy więc , żeby była podzielna przez 5. Badając przy pomocy kongruencji reszty z dzielenia liczb 4^n oraz 7^n przez 5 stwierdzamy, że tylko dla n postaci $4k + 2$ suma $4^n + 7^n$ jest podzielna przez 5.
$4^{4k+2} \equiv 1$, a $7^{4k+2} \equiv -1 \; mod \; 5$.

3. Dla jakich wartości parametru p równanie

$$\frac{\log(px^2)}{\log(x+1)} = 2$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie?

Założenia: $x > -1, x \neq 0, p > 0$

Przekształćmy równanie do postaci:

$$\log_{x+1} px^2 = 2$$
$$(x+1)^2 = px^2$$
$$(p-1)x^2 - 2x - 1 = 0$$

Równanie to ma jedno rozwiązanie gdy:
a) jest liniowe: zachodzi dla $p = 1$
b) ma deltę równą zero: $p = 0$ - nie należy do dziedziny
c) ma deltę większą od zera, czyli $p > 0$, ale jedno z rozwiązań nie należy do dziedziny:

- 0 nigdy nie jest rozwiązaniem
- Aby jedno z rozwiązań było mniejsze, a drugie większe od -1 potrzeba by: ramiona paraboli były skierowane do góry i wartość dla -1 była ujemna (co nigdy nie zachodzi) lub ramiona skierowane w dół i wartość dla -1 dodatnia, co zachodzi dla $p \in (0,1)$

Ostatecznie dostajemy $p \in (0,1]$