



Zestaw 21

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Dziadek ma dwa razy tyle lat, ile miała babcia wtedy, gdy dziadek miał tyle, ile babcia ma teraz. Razem mają 140 lat. Po ile lat liczy każde z nich?

Wprowadźmy oznaczenia:

x – wiek dziadka

y – wiek babci

$(x - y)$ – o tyle lat dziadek jest starszy od babci

$y - (x - y)$ – tyle lat miała babcia, gdy dziadek miał tyle, ile ona ma teraz (obydwoje byli wtedy młodszy o $(x - y)$ lat)

Można teraz zapisać układ równań:

$$\begin{cases} x + y = 140 \\ x = 2(y - (x - y)) \end{cases}$$

Rozwiązując ten układ dowiemy się, że dziadek ma 80 lat, a babcia – 60.

2. Udowodnij, że każdą liczbę naturalną można przedstawić w postaci ilorazu kwadratu pewnej liczby naturalnej i sześcianu pewnej liczby naturalnej.

$$n = \frac{(n^2)^2}{n^3}$$

Ot i cały dowód...

3. Rozszyfruj poniższy przykład na dodawanie, w którym jednakowym literom odpowiadają jednakowe cyfry, a różnym literom – różne cyfry (wystarczy podać rozwiązanie bez uzasadnienia, że jest ono jedynym).

$$\begin{array}{r} A B C D E E E \\ + A F F F F H E H \\ \hline F H H A B C D H E \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9876555 \\ +91111050 \\ \hline 100987605 \end{array}$$

KLASY TRZECIE

1. Na ile sposobów można n kul rozmieścić w n pudełkach tak, żeby dokładnie dwa pudełka zostały puste? Załóż, że $n \geq 3$ oraz zarówno kule jak i pudełka są między sobą rozróżnialne.

Możemy to robić tak:

Rozważmy dwa przypadki:

a) są dwie szuflady, w których są po dwie kule

Wybieramy dwa pudełka, które mają być puste – na $\binom{n}{2}$ sposobów, wybieramy dwa pudełka (nazwijmy je A i B), w których mają być dwie kule – na $\binom{n-2}{2}$ sposobów, wybieramy dwie kule do pudełka A – na $\binom{n}{2}$ sposobów, wybieramy dwie kule do pudełka B – na $\binom{n-2}{2}$ sposobów, pozostałe kule rozkładamy do pozostałych pudełek – na $(n-4)!$ sposobów.

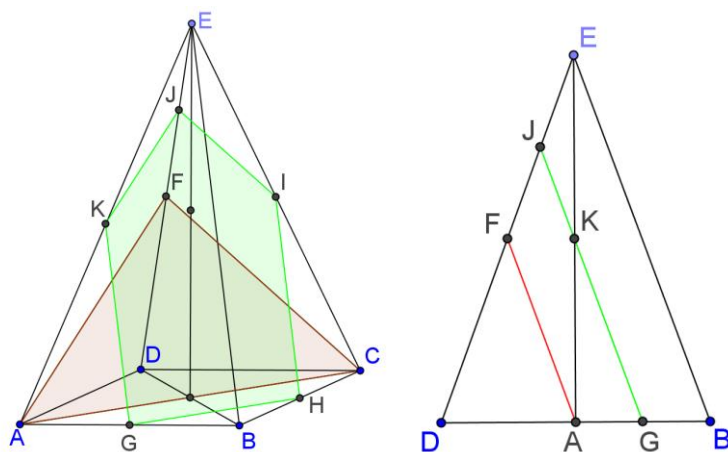
b) jest szuflada, w której są trzy kule

Wybieramy dwa pudełka, które mają być puste – na $\binom{n}{2}$ sposobów, wybieramy pudełko, w którym mają być trzy kule – na $(n-2)$ sposobów, wybieramy do niego trzy kule – na $\binom{n}{3}$ sposobów, rozkładamy pozostałe kule do pozostałych pudełek – na $(n-3)!$ Sposoby.

Ostatecznie, wszystkich sposobów jest:

$$\binom{n}{2} \cdot \binom{n-2}{2} \cdot \binom{n}{2} \cdot \binom{n-2}{2} \cdot (n-4)! + \binom{n}{2} \cdot (n-2) \binom{n}{3} (n-3)!$$

2. Dany jest prawidłowy ostrosłup czworokątny. Pole przekroju płaszczyzną przechodzącą przez przekątną podstawy i równoległą do krawędzi bocznej skośnej względem tej przekątnej jest równe P . Pole przekroju płaszczyzną przechodzącą przez środki dwóch sąsiednich boków podstawy i środek wysokości ostrosłupa wynosi S . Oblicz iloraz $\frac{P}{S}$.



Na rysunkach powyżej widzimy oba przekroje. Na prawym rysunku mamy widok z boku, który sugeruje, jakie przyjąć wymiary.

Oznaczmy krawędź podstawy ostrosłupa przez a , a jego krawędź boczną przez b . Czerwony przekrój jest trójkątem o podstawie $a\sqrt{2}$ i wysokości $\frac{b}{2}$ (zob. prawy rysunek i zastosuj twierdzenie o odcinku łączącym środki ramion trójkąta). Tak więc

$$P = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{b}{2} = \frac{ab\sqrt{2}}{4}$$

Zielony przekrój składa się z prostokąta o wymiarach $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ i $\frac{b}{2}$ oraz z trójkąta o podstawie $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ i wysokości $\frac{b}{4}$ (dlaczego takie wymiary? – znów wystarczy zastosować twierdzenie o odcinku łączącym środki ramion trójkąta; dlaczego prostokąt? – odcinek GH jest prostopadły do płaszczyzny DBE, a więc też do odcinka BE; odcinki GK i HI są równoległe do BE, a więc prostopadłe do GH). Tak więc:

$$S = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{b}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{b}{4} = \frac{5ab\sqrt{2}}{16}$$

I ostatecznie:

$$\frac{P}{S} = \frac{4}{5}$$

3. Dla jakich $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ liczby

$$\operatorname{tg}(x), 1, \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}$$

w podanej kolejności są trzema początkowymi wyrazami rosnącego ciągu arytmetycznego (a_n) ? Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ oblicz sumę $a_n + a_{n+1} + \dots + a_{2n}$.

Zobaczmy, co to za ciąg:

$$\frac{\operatorname{tg}(x) + \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}}{2} = 1$$

Powyższe równanie ma dwa rozwiązania: $x = \frac{\pi}{3}$ lub $x = -\frac{\pi}{3}$

Dla $x = \frac{\pi}{3}$ dostajemy ciąg $\sqrt{3}, 1, 2 - \sqrt{3}$. Jest to ciąg malejący, więc go odrzucamy.

Dla $x = -\frac{\pi}{3}$ dostajemy ciąg $-\sqrt{3}, 1, 2 + \sqrt{3}$. Jest to ciąg rosnący o różnicy $1 + \sqrt{3}$.

Obliczmy teraz sumę $a_n + a_{n+1} + \dots + a_{2n} = \frac{a_n + a_{2n}}{2} \cdot n$

$$a_n = -\sqrt{3} + (n-1)(1 + \sqrt{3}) = n(1 + \sqrt{3}) - 1$$

$$a_{2n} = -\sqrt{3} + (2n-1)(1 + \sqrt{3}) = 2n(1 + \sqrt{3}) - 1$$

I ostatecznie

$$\frac{a_n + a_{2n}}{2} \cdot n = \frac{3n(1 + \sqrt{3}) - 2}{2} \cdot n$$

Odpowiedź: Rosnący ciąg arytmetyczny dostaniemy dla $x = -\frac{\pi}{3}$.

$$\text{Suma } a_n + a_{n+1} + \dots + a_{2n} = \frac{3n(1+\sqrt{3})-2}{2} \cdot n$$