



Zestaw 25

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Wykazać, że z dowolnego zbioru 100 dodatnich liczb całkowitych można tak wybrać pewien niepusty podzbiór, by suma liczb z tego podzbioru była podzielna przez 100.
2. Wykaż, że w dowolnej grupie osób zawsze są takie dwie, które mają tyle samo znajomych. (Jeśli A zna B, to B zna A).
3. Na nieskończonej szachownicy stoi 1999 skoczków szachowych. Udowodnij, że można spośród nich wybrać 1000 w taki sposób, że żadne dwa z nich się nie atakują.

KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich x, y prawdziwa jest nierówność

$$x^4 + y^4 > xy^3$$

2. Wyznacz zbiór wartości funkcji $f(x) = x^2 + \frac{3}{x}, x > 0$.

3. Udowodnij, że dla dodatnich liczb a, b zachodzi nierówność

$$\frac{a^4 + b^4}{a^3 + b^3} \geq \frac{a^2 + b^2}{a + b}$$