Zestaw 22

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z zachodzi nierówność:

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{3}{4} \geq x + y + z$$

Przenieśmy wszystko na lewą stronę.

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{3}{4} - x - y - z = x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 - y + \frac{1}{4} + z^2 - z + \frac{1}{4}$$
$$= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$$

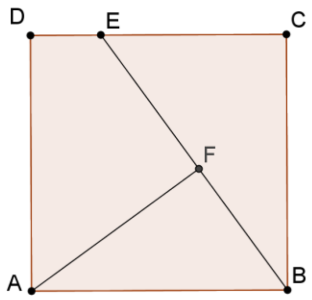
2. Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych x, y, z zachodzi nierówność:

$$x^3 + y^3 \geq x^2y + xy^2$$

Przenieśmy wszystko na lewą stronę.

$$x^3 - x^2y - xy^2 + y^3 = x^2(x-y) - y^2(x-y) = (x^2 - y^2)(x-y)$$
$$= (x+y)(x-y)(x-y) = (x+y)(x-y)^2 \geq 0$$

3. Czworokąt $ABCD$ jest kwadratem. Wyznacz długość odcinka EC, jeśli $|AF| = 4$ i $|FB| = 3$ i kąt AFE jest kątem prostym.



Z twierdzenia Pitagorasa łatwo policzymy, że bok kwadratu ma długość 5.

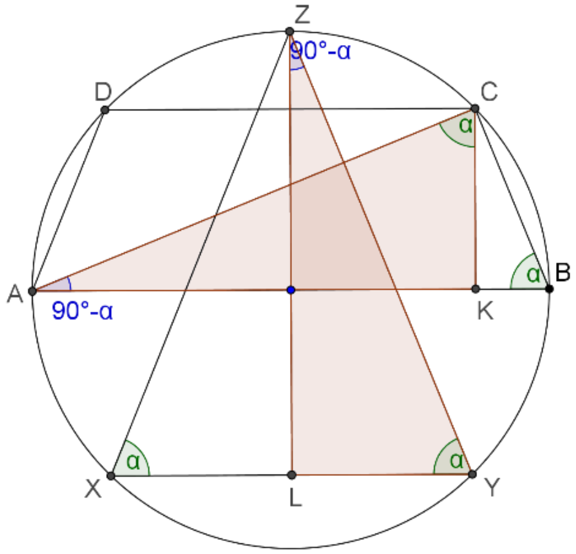
Trójkąty ABF i BCE są podobne (oba mają kąt prosty oraz $\measuredangle FBA = 90° - \measuredangle EBC = \measuredangle BEC$). Zachodzi więc proporcja:

$$\frac{EC}{5} = \frac{3}{4}$$

Wyliczymy z niej, że EC ma długość 3,75.

KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. W okrąg wpisano trapez równoramienny o dłuższej podstawie będącej średnicą okręgu oraz trójkąt, którego boki są równoległe do boków trapezu. Wykaż, że trapez i trójkąt mają równe pola.

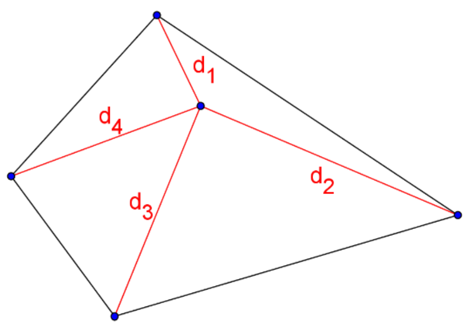


Wykażemy najpierw, że trójkąty ZLY i AKC są przystające. Jak łatwo zauważyć, mają one takie same kąty. Odcinki AC i YZ są równej długości, ponieważ odpowiadające im łuki są przystające, a łuki są przystające, bo oparte na nich kąty wpisane są równe. Mamy więc spełnioną cechę przystawania kąt, bok , kąt. Jak łatwo zauważyć, pole trójkąta AKC stanowi połowę pola trapezu $ABCD$. Skoro więc połowa pola trapezu jest równa połowie pola trójkąta XYZ, to całe pola tych figur też są równe.

2. Niech d_1, d_2, d_3, d_4 będą odległościami punktu wewnętrznego czworokąta wypukłego od jego wierzchołków. Wykaż, że

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 \geq 2\sqrt{2S}$$

gdzie S oznacza pole czworokąta.



Zauważmy najpierw, że pole trójkąta o bokach a i b spełnia zależność:

$$P \leq \frac{ab}{2}$$

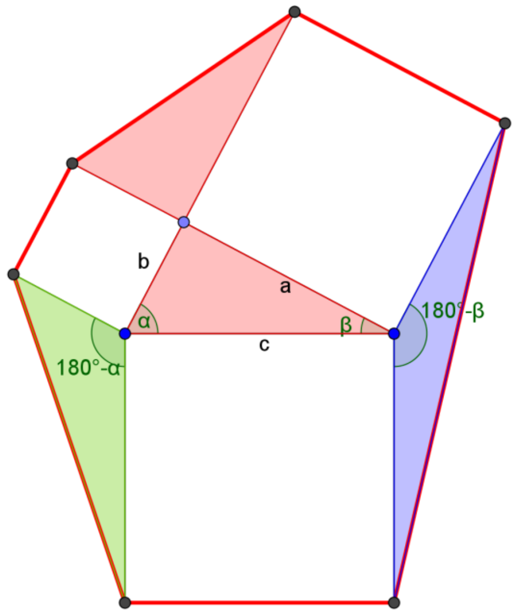
Istotnie. $P = \frac{1}{2} ab \sin\gamma$, gdzie γ jest kątem między bokami a i b, a $\sin\gamma$ jest mniejszy lub równy 1. Traktując pole czworokąta jako sumę pól czterech trójkątów widocznych na rysunku otrzymujemy zależność:

$$2S \leq d_1 d_2 + d_2 d_3 + d_3 d_4 + d_4 d_1$$

Wykorzystując tę nierówność oraz nierówność między średnią arytmetyczną a średnią geometryczną otrzymujemy:

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = (d_1 + d_3) + (d_2 + d_4) \geq 2\sqrt{(d_1 + d_3)(d_2 + d_4)}$$
$$= 2\sqrt{d_1 d_2 + d_2 d_3 + d_3 d_4 + d_4 d_1} \geq 2\sqrt{2S}$$

3. W trójkącie prostokątnym dane są długości jego przyprostokątnych. Na bokach zbudowano kwadraty, a następnie wyznaczono sześciokąt jak na rysunku. Oblicz pole tego sześciokąta.



Pola kwadratów i czerwonych trójkątów prostokątnych policzymy łatwo.
Trójkąt zielony:

$$P = \frac{1}{2} bc \sin\alpha = \frac{1}{2} bc \cdot \frac{a}{c} = \frac{1}{2} ab$$

Trójkąt niebieski:

$$P = \frac{1}{2} ac \sin\beta = \frac{1}{2} ac \cdot \frac{b}{c} = \frac{1}{2} ab$$

Ostatecznie pole sześciokąta:

$$P = a^2 + b^2 + c^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} ab = a^2 + b^2 + a^2 + b^2 + 2ab = 2a^2 + 2b^2 + 2ab$$