Zestaw 20

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Udowodnij wzór:

$$1^3+2^3+3^3+\dots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Przeprowadzimy dowód indukcyjny

Dla $n=1$ mamy $1^3=\left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2$ co jest prawdą.

Załóżmy, że $1^3+2^3+3^3+\dots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$. Chcemy dostać, że
$1^3+2^3+3^3+\dots+n^3+(n+1)^2=\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2$.

Skorzystajmy z założenia indukcyjnego:

$$1^3+2^3+3^3+\dots+n^3+(n+1)^2=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2+(n+1)^2=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+\frac{4(n+1)^2}{4}$$
$$=\frac{(n+1)^2\big(n^2+4(n+1)\big)}{4}=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}=\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2$$

2. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $n^3\ +\ 2n$ jest podzielna przez 3.

Dla $n=1$: $n^3\ +\ 2n=3$

Załóżmy, że $n^3\ +\ 2n=3k$. Chcemy pokazać, że $(n+1)^3+2(n+1)=3l$

$$(n+1)^3+2(n+1)=n^3+3n^2+3n+1+2n+2=n^3+2n+3n^2+3n+3$$
$$=3k+3(n^2+n+1)=3(k+n^2+n+1)$$

Można było to prosto udowodnić bez stosowania indukcji, ale chciałem tu wyeksponować temat ostatniego kółka.

3. Udowodnij, że wszystkie liczby postaci 10017, 100117, 1001117,… są podzielne przez 53.

Przeprowadzimy dowód indukcyjny. Oznaczmy nasze liczby przez a_1, a_2, … Dla a_1 sprawdzamy ręcznie, że podzielność zachodzi. Niech zachodzi ona dla a_n. Liczba a_{n+1} jest postaci $10a_n-53$, więc jest podzielna przez 53, co kończy dowód.

KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Ile jest dodatnich liczb całkowitych, których największy dzielnik właściwy (tzn. dzielnik różny od 1 i od danej liczby) wynosi 91?

Są 4 takie liczby.

Taka liczba musi mieć postać $k \cdot 91 = k \cdot 7 \cdot 13$. Przyjrzyjmy się takim liczbom:
$2 \cdot 7 \cdot 13$ zgadza się
$3 \cdot 7 \cdot 13$ zgadza się
$4 \cdot 7 \cdot 13$ największy dzielnik właściwy to $2 \cdot 91$
$5 \cdot 7 \cdot 13$ zgadza się
$6 \cdot 7 \cdot 13$ największy dzielnik właściwy to $3 \cdot 91$
$7 \cdot 7 \cdot 13$ zgadza się

Dla k większych od 7 największym dzielnikiem właściwym będzie $k \cdot 13$.

2. Dla jakich wielkości parametru k proste: $kx + y = 2$ oraz $x + ky = k + 1$ przetną się we wnętrzu kwadratu, którego punkty A (2, -2) i C (-2, 2) są końcami przekątnej?

Zauważmy najpierw, że dla $k = 1$ te proste się pokrywają, a dla $k = -1$ są równoległe. Jeśli k jest różne od 1 i -1 to punkt przecięcia ma współrzędne $\left(\frac{k+2}{k+1}, \frac{1}{k+1}\right)$, co otrzymamy rozwiązując odpowiedni układ równań. W zadaniu chodzi więc o rozwiązanie układu nierówności:

$$-2 < \frac{k+2}{k+1} < 2$$
$$-2 < \frac{1}{k+1} < 2$$

Rozwiązujemy układ nierówności i stwierdzamy po uwzględnieniu założenia $k \neq 1, k \neq -1$, że $k \in (-\infty, -1{,}5) \cup (0,1) \cup (1, \infty)$

3. Dla jakich wartości parametru p równanie

$$\frac{\log(px^2)}{\log(x+1)} = 2$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie?

Założenia: $x > -1, x \neq 0, p > 0$

Przekształćmy równanie do postaci:

$$\log_{x+1} px^2 = 2$$
$$(x+1)^2 = px^2$$
$$(p-1)x^2 - 2x - 1 = 0$$

Równanie to ma jedno rozwiązanie gdy:
a) jest liniowe: zachodzi dla $p = 1$
b) ma deltę równą zero: $p = 0$ - nie należy do dziedziny
c) ma deltę większą od zera, czyli $p > 0$, ale jedno z rozwiązań nie należy do dziedziny:

- 0 nigdy nie jest rozwiązaniem
- Aby jedno z rozwiązań było mniejsze, a drugie większe od -1 potrzeba by: ramiona paraboli były skierowane do góry i wartość dla -1 była ujemna (co nigdy nie zachodzi) lub ramiona skierowane w dół i wartość dla -1 dodatnia, co zachodzi dla $p \in (0,1)$

Ostatecznie dostajemy $p \in (0,1]$