Zestaw 24

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Przypuśćmy, że x i y to dodatnie liczby całkowite spełniające $x^2 + 2y^2 = 2468$. Znajdź x, jeżeli wiadomo, że istnieje dokładnie jedna taka para (x, y) oraz $1234 = 28^2 + 2 \cdot 15^2$.

Korzystając z danej równości $1234 = 28^2 + 2 \cdot 15^2$, otrzymujemy

$$2468 = 2(28^2 + 2 \cdot 15^2) = (2 \cdot 15)^2 + 2 \cdot 28^2$$

Stąd wynika, że para $(x, y) = (30,28)$ spełnia warunki zadania, a skoro wiemy, że istnieje dokładnie jedna para o tej własności, to $x = 30$.

2. Pudełko czekoladek ma kształt trójkąta równobocznego o boku s cm. Pudełko jest szczelnie wypełnione przez $2n$ czekoladek, z których n jest w kształcie trójkąta równobocznego o boku 1 cm, a n — trójkąta równobocznego o boku 2 cm. Jaka jest najmniejsza możliwa wartość s?

Niech a będzie polem małej czekoladki, tzn. tej, której bok ma długość 1 cm. Wówczas pole dużej czekoladki to $4a$, łączne pole wszystkich czekoladek to $na + 4na = 5na$, a pole dna pudełka to s^2a, gdyż aby otrzymać kształt pudełka wystarczy powiększyć małą czekoladkę s razy w każdym kierunku. Stąd wynika, że $5n = s^2$, więc liczba s jest wielokrotnością liczby 5. Można udowodnić, że nie jest możliwe zmieszczenie pięciu dużych czekoladek w pudełku o boku 5cm, więc $s \neq 5$. Łatwo natomiast znaleźć ułożenie 20 małych i 20 dużych czekoladek wewnątrz pudełka o boku 10 cm.

3. Na swoje 62-dniowe letnie wakacje w lipcu i sierpniu Włodek przygotował dokładny plan, w które dni będzie kłamał, a w które mówił prawdę. Następnie, Włodek k-tego dnia wakacji (dla każdego k od 1 do 62) stwierdzał, że zaplanował kłamanie w co najmniej k dni. Jak wiele spośród tych stwierdzeń było kłamstwami?

Zauważmy, że jeżeli Włodek mówił prawdę jednego dnia, to musiał on również mówić prawdę każdego z dni poprzednich. Gdyby mówił prawdę tylko w ciągu $k < 31$ dni, otrzymalibyśmy sprzeczność z tym, że kłamał przez $62 - k > 31$ dni. Podobnie, gdyby Włodek mówił prawdę przez więcej niż 31 dni, oznaczałoby to że za mało kłamał. Stąd wnioskujemy, że Włodek kłamał dokładnie w 31 dni.

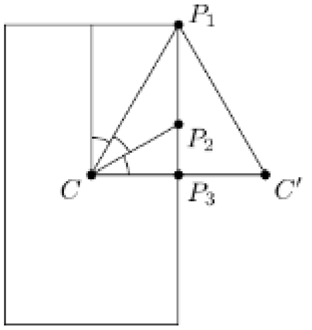
KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Powiemy, że dodatnia liczba całkowita n jest cudowna, jeżeli suma cyfr tej liczby jest podzielna przez 17 oraz suma cyfr liczby n+10 także jest podzielna przez 17. Jaka jest najmniejsza liczba cudowna?

Oznaczmy sumę cyfr liczby r przez $Q(r)$. Jeżeli cyfra dziesiątek liczby n jest różna od 9, to $Q(n+10) = Q(n) + 1$. Wobec tego cyfrą dziesiątek liczby n musi być 9. Z kolei jeżeli cyfra setek jest różna od 9, to $Q(n+10) = Q(n) - 8$. Jeśli cyfra setek jest równa 9, a cyfra tysięcy jest różna od 9, to
$Q(n+10) = Q(n) - 17$, więc istnieje możliwość, że obie liczby $Q(n)$ i $Q(n+10)$ są podzielne przez 17. By uzyskać najmniejszą możliwą wartość n, przypuśćmy, że cyfry dziesiątek i setek liczby n są równe 9 oraz $Q(n) = 2 \cdot 17 = 34$. Suma wszystkich cyfr oprócz cyfr dziesiątek i setek spełnia wówczas nierówność $34 - 2 \cdot 9 = 16 < 2 \cdot 9$, co oznacza, że oprócz nich wystarczą dwie cyfry. Łatwo teraz zauważyć, że $n = 7999$ to szukana najmniejsza liczba cudowna.

2. Podczas zakupów, Sławek zwrócił uwagę na zegarek, który jest zapakowany w przezroczyste prostokątne opakowanie. Zegarek jest tak ułożony, że środek pudełka oraz środek zegarka (tzn. punkt wspólny jego wskazówek) się pokrywają. Krótszy bok opakowania ma długość 3cm. Sławek zauważył, że w południe wskazówka zegarowa wskazuje środek krótszego boku pudełka, a o godzinie pierwszej — róg pudełka. Jak daleko od siebie znajdują się punkty na brzegu opakowania, które są wskazywane przez wskazówkę godzinową o godzinach odpowiednio pierwszej i drugiej?

Oznaczmy przez P_x punkt na brzegu pudełka, który jest wskazywany przez wskazówkę zegarową o godzinie x. Niech ponadto C będzie środkiem pudełka. Z równości
$\angle P_2CP_1 = \angle P_3CP_2 = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$ widzimy, że $P2$ jest środkiem trójkąta równobocznego $CC'P_1$, gdzie C' oznacza odbicie punktu C względem punktu P_3. Szukana odległość P_1P_2 jest równa $2\ /\ 3$ wysokości trójkąta równobocznego o boku 3cm, czyli $P_1P_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 3cm = \sqrt{3}cm.$



3. Znajdź największą liczbę pierwszą p mniejszą od 210 o tej własności, że liczba $210 - p$ jest złożona.

Zamiast szukać największej liczby pierwszej p, zajmiemy się znalezieniem najmniejszej liczby złożonej n, dla której liczba $210 - n$ jest pierwsza. Mamy 210=2·3·5·7, więc gdyby liczba n była podzielna przez 2, 3, 5 lub 7, to w konsekwencji także liczba $210 - n$, w szczególności — liczba ta nie byłaby pierwsza. Najmniejszą liczbą złożoną, która nie została wykluczona jako wartość n, jest 11^2, skąd uzyskujemy $p = 210 - 121 = 89$. Liczba 89 jest pierwsza, więc rozwiązanie jest zakończone.

Rozwiązania należy oddać do piątku 13 marca do godziny 15.10 koordynatorowi konkursu panu Jarosławowi Szczepaniakowi lub przesłać na adres jareksz@interia.pl do północy w piątek 13 marca.