Zestaw 25

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Wykazać, ze z dowolnego zbioru 100 dodatnich liczb całkowitych można tak wybrać pewien niepusty podzbiór, by suma liczb z tego podzbioru była podzielna przez 100.

Oznaczmy elementy naszego zbioru $a_1, a_2, \dots, a_{100}$.
Rozważmy sumy:

$$\begin{aligned}&a_1\\&a_1 + a_2\\&a_1 + a_2 + a_3\\&\dots\\&a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{100}\end{aligned}$$

Jeżeli któraś z tych sum jest równa 100, to sprawa załatwiona. Jeżeli żadna nie jest równa 100, to istnieją dwie sumy dające taką samą resztę z dzielenia przez 100 (sum jest 100, a reszt różnych od 0 – 99). Wystarczy od większej sumy odjąć mniejszą i mamy tezę.

2. Wykaż, że w dowolnej grupie osób zawsze są takie dwie, które mają tyle samo znajomych. (Jeśli A zna B, to B zna A).

Niech w grupie będzie n osób. Każdy deklaruje, ilu ma w tej grupie znajomych. Możliwe deklaracje to: 0, 1, …, n-1. Zauważmy jednak, że jeśli jest ktoś, kto zna 0 osób, to nie ma takiego, kto zna n-1 osób. Możliwych deklaracji jest więc ostatecznie n-1, a osób n, z zasady szufladkowej wynika więc, że są dwie, które mają tyle samo znajomych.

3. Na nieskończonej szachownicy stoi 1999 skoczków szachowych. Udowodnij, że można spośród nich wybrać 1000 w taki sposób, że żadne dwa z nich się nie atakują.

Spośród 1999 skoczków co najmniej 1000 stoi na polu jednego koloru, a takie skoczki się wzajemnie nie atakują (skoczek stojący na białym polu atakuje pola czarne).

KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich x, y prawdziwa jest nierówność

$$x^4 + y^4 > xy^3$$

Wykorzystamy nierówność między średnią arytmetyczną, a średnią geometryczną

$$x^4 + y^4 = x^4 + \frac{y^4}{3} + \frac{y^4}{3} + \frac{y^4}{3} \geq 4\sqrt[4]{\frac{x^4y^{12}}{27}} = \frac{4}{\sqrt[4]{27}}xy^3 > xy^3$$

bo $\frac{4}{\sqrt[4]{27}} > 1$

2. Wyznacz zbiór wartości funkcji $f(x) = x^2 + \frac{3}{x}$, $x > 0$.

Jest to przedział $\langle\frac{3}{2}\sqrt[3]{18}, \infty\rangle$. Aby to udowodnić, skorzystajmy z nierówności między średnią arytmetyczną a średnią geometryczną:

$$x^2 + \frac{3}{x} = x^2 + \frac{3}{2x} + \frac{3}{2x} \geq 3\sqrt[3]{x^2 \cdot \frac{3}{2x} \cdot \frac{3}{2x}} = 3\sqrt[3]{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{18}$$

Równość zachodzi, gdy $x^2 = \frac{3}{2x}$, czyli dla $x = \frac{\sqrt[3]{12}}{2}$

3. Udowodnij, że dla dodatnich liczb a, b zachodzi nierówność

$$\frac{a^4 + b^4}{a^3 + b^3} \geq \frac{a^2 + b^2}{a + b}$$

Zbadajmy znak różnicy $\frac{a^4+b^4}{a^3+b^3} - \frac{a^2+b^2}{a+b}$

$$\frac{a^4 + b^4}{a^3 + b^3} - \frac{a^2 + b^2}{a + b} = \frac{(a^4 + b^4)(a + b) - (a^2 + b^2)(a^3 + b^3)}{(a^3 + b^3)(a + b)} = \frac{ab(a^3 + b^3 - a^2b - ab^2)}{(a^3 + b^3)(a + b)}$$
$$= \frac{ab\left(a^2(a - b) - b^2(a - b)\right)}{(a^3 + b^3)(a + b)} = \frac{ab(a - b)^2(a + b)}{(a^3 + b^3)(a + b)} \geq 0$$

Co kończy dowód nierówności.