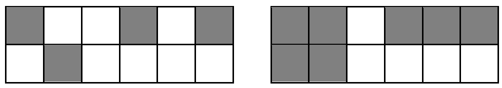
Zestaw 26

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Na każdym polu szachownicy 8×8 siedzi chrząszcz. 7 Chrząszczy choruje na pewną chorobą zakaźną. Zdrowy chrząszcz, którego pole sąsiaduje (bokiem) z co najmniej dwoma polami zarażonych chrząszczy, sam zostaje zarażony. Czy istnieje takie początkowe ustawienie siedmiu chorych chrząszczy, że po pewnym czasie choroba dopadnie wszystkich mieszkańców szachownicy?

Nie jest możliwe, aby wszystkie chrząszcze zostały zarażone. Nazwijmy zbiór wszystkich pól z chorymi chrząszczami obszarem zarażonym. Zauważmy, że rozprzestrzenianie się zarazy nie zwiększa obwodu obszaru zarażonego. Popatrzmy na przykłady:



przed zarażeniem po zarażeniu

Na początku epidemii zarażony obszar ma obwód równy maksymalnie 28. Obwód całej szachownicy to 32. Nigdy więc nie będą zarażone wszystkie chrząszcze.

2. Mamy 1 dukata (i 0 talarów). W pierwszym kantorze możemy wymienić 1 dukata na 10 talarów, natomiast w drugim kantorze — 1 talara na 10 dukatów. Czy możemy tak wymieniać pieniądze, aby na końcu mieć tyle samo dukatów, co talarów?

Nie możemy. Różnica między ilością dukatów a ilością talarów jest cały czas liczbą, która daje resztę 1 dzielenia przez 11, a więc nie może wynieść 0.

3. Rysujemy dziesięciokąt foremny i w każdym wierzchołku kładziemy żeton. Ruch polega na wybraniu dowolnych dwóch żetonów i przełożeniu każdego z nich do dowolnego wierzchołka sąsiadującego z tym, w którym leżał. Czy można doprowadzić do sytuacji, gdy wszystkie żetony leżą w jednym wierzchołku?

Pokolorujmy wierzchołki dziesięciokąta na przemian na czerwono i na niebiesko. Na początku mamy tyle samo żetonów na wierzchołkach czerwonych co na wierzchołkach niebieskich. Gdy wykonujemy ruchy różnica między ilością żetonów na polach niebieskich i na polach czerwonych albo się nie zmienia, albo zmienia się o 4. Jest więc stale liczbą podzielną przez 4. Gdyby wszystkie żetony były na jednym polu, ta różnica wynosiłaby 10, a to nie jest liczba podzielna przez 4.

KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Wykaż, że dla dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c mamy

$$\frac{4}{a}+\frac{9}{b}+\frac{16}{c} \geq \frac{81}{a+b+c}$$

Pomnóżmy obie strony przez $(a+b+c)$ i skorzystajmy z nierówności Cauchy'ego-Schwarza:

$$(a+b+c)\left(\frac{4}{a}+\frac{9}{b}+\frac{16}{c}\right) \geq \left(\sqrt{a}\cdot\frac{2}{\sqrt{a}}+\sqrt{b}\cdot\frac{3}{\sqrt{b}}+\sqrt{c}\cdot\frac{4}{\sqrt{c}}\right)^2 = 81$$

2. Udowodnij, że dowolne nieujemne liczby x, y, z spełniają nierówność.

$$\frac{2}{x+1}+\frac{2}{y+1}+\frac{2}{z+1} > \frac{1}{xy+1}+\frac{1}{yz+1}+\frac{1}{zx+1}$$

Pokażemy, że $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1} > \frac{1}{xy+1}$. Podobnie wykażemy, że $\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1} > \frac{1}{yz+1}$ oraz $\frac{1}{z+1}+\frac{1}{x+1} > \frac{1}{zx+1}$. Po dodaniu stronami dostaniemy żądaną nierówność.

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1} > \frac{1}{xy+1}$$
$$\frac{x+y+2}{(x+1)(y+1)} > \frac{1}{xy+1}$$
$$x^2y+x+xy^2+y+2xy+2 > xy+x+y+1$$
$$x^2y+xy^2+xy+1 > 0$$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa, bo x, y są nieujemne.

3. Liczby a, b, c są dodatnie i $abc = 1$. Wykaz, że

$$\frac{1+ab}{1+a}+\frac{1+bc}{1+b}+\frac{1+ca}{1+c} \geq 3$$

$$\frac{1+ab}{1+a}+\frac{1+bc}{1+b}+\frac{1+ca}{1+c} = \frac{abc+ab}{1+a}+\frac{abc+bc}{1+b}+\frac{abc+ca}{1+c}$$
$$= \frac{ab(c+1)}{1+a}+\frac{bc(a+1)}{1+b}+\frac{ac(b+1)}{1+c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{ab(c+1)bc(a+1)ac(b+1)}{(1+a)(1+b)(1+c)}}$$
$$= 3\sqrt[3]{(abc)^2} = 3$$

Po drodze skorzystaliśmy z nierówności między średnią arytmetyczną a średnią geometryczną.