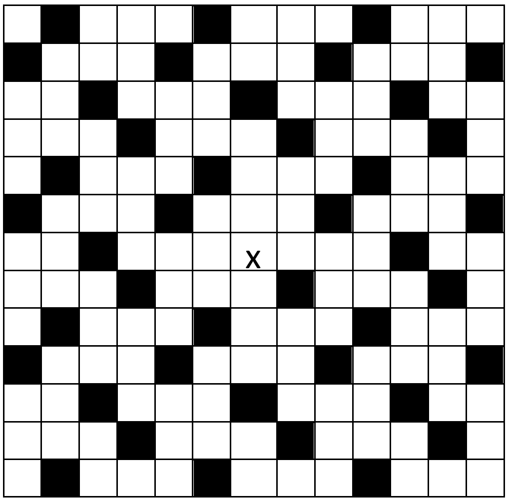
Zestaw 27

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Czy można pokryć szachownicę o wymiarach 13x13 klockami 1x4 w taki sposób, że tylko środkowe pole nie jest zakryte? Odpowiedź uzasadnij.

Pokażemy, że nie można.

Pokolorujmy szachownicę jak na rysunku poniżej.



Zauważmy, że każdy klocek 1x4 przykryje dokładnie jedno czarne pole (i w poziomie i w pionie czarne pole jest co czwarte). Do pokrycia szachownicy bez środkowego pola potrzebujemy 42 klocków, a czarnych pól jest 41.

2. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 = -5 \\ x + y^2 = 2 \end{cases}$$

Mnożymy drugie równanie przez 2:

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 = -5 \\ 2x + 2y^2 = 4 \end{cases}$$

Dodajemy równania stronami:

$$x^2 + 2x = -1$$
$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

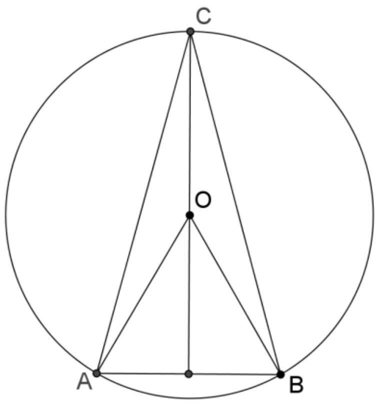
Prawą stronę zwijamy używając wzoru skróconego mnożenia:

$$(x+1)^2 = 0$$

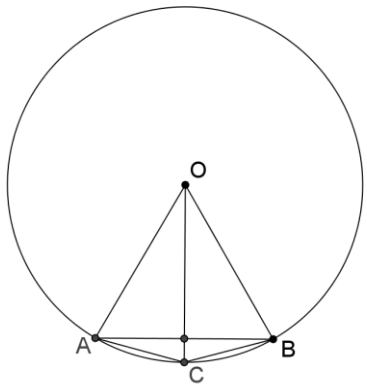
Czyli $x = -1$

Podstawiamy -1 za x w którymkolwiek równaniu i dostajemy, że $y^2 = 3$. Rozwiązania są więc dwa: $(-1, \sqrt{3})$ i $(-1, -\sqrt{3})$. Sprawdzenie pokazuje, że obydwa są dobre.

3. W okrąg o promieniu r wpisano trójkąt równoramienny, którego podstawa też ma długość r. Oblicz pole tego trójkąta.



a)



b)

Zadanie ma 2 rozwiązania:

a) wysokość trójkąta ABC jest sumą wysokości trójkąta równobocznego ABO i promienia OC i ma długość $h = \frac{r\sqrt{3}}{2} + r$ oraz pole $P = \frac{1}{2} \cdot r \cdot \left(\frac{r\sqrt{3}}{2} + r\right)$

a) wysokość trójkąta ABC jest różnicą promienia OC i wysokości trójkąta równobocznego ABO i ma długość $h = r - \frac{r\sqrt{3}}{2}$ oraz pole $P = \frac{1}{2} \cdot r \cdot \left(r - \frac{r\sqrt{3}}{2}\right)$

KLASY TRZECIE

1. Rozwiąż równanie:

$$\left(5\sqrt{2} - 7\right)^{x-1} = \left(5\sqrt{2} + 7\right)^{3x}$$

Wykażemy najpierw, że liczby $5\sqrt{2} - 7$ oraz $5\sqrt{2} + 7$ są dla siebie nawzajem odwrotnościami. Jest tak, ponieważ ich iloczyn wynosi 1, co łatwo sprawdzić.
Robimy podstawienie $5\sqrt{2} - 7 = t$ i nasze równanie przybiera postać:

$$t^{x-1} = \frac{1}{t^{3x}}$$
$$t^{4x-1} = 1$$
$$4x - 1 = 0$$
$$x = \frac{1}{4}$$

2. Wykaż, że $(2n + 2)$*-cyfrowa liczba* $\underbrace{11\ldots1}_{n}\underbrace{22\ldots2}_{n+1}5$ *jest dla dowolnego n kwadratem liczby naturalnej.*

Badamy liczby o których mowa w zadaniu i zauważamy że: $1225 = 35^2$, $112225 = 335^2$, $11122225 = 3335^2$. Stawiamy więc hipotezę, że

$$\underbrace{11 \dots 1}_{n} \underbrace{22 \dots 2}_{n+1} 5 = \left(\underbrace{33 \dots 3}_{n} 5\right)^2$$

Trzeba teraz tę hipotezę udowodnić. Można to zrobić na przykład tak:

Oznaczmy liczbę $\underbrace{11 \dots 1}_{n}$ przez l. Wówczas $\underbrace{11 \dots 1}_{n} \underbrace{22 \dots 2}_{n+1} 5 = l \cdot 10^{n+2} + 2l \cdot 100 + 25$.

Zauważmy, że $l = \frac{10^n - 1}{9}$, czyli

$$\begin{aligned}
\underbrace{11 \dots 1}_{n} \underbrace{22 \dots 2}_{n+1} 5 &= \frac{10^n - 1}{9} \cdot 10^{n+2} + 2 \cdot \frac{10^n - 1}{9} \cdot 100 + 25 = \\
&= \frac{10^{2n+2} - 10^{n+2}}{9} + \frac{2 \cdot 10^{n+2} - 200}{9} + 25 = \\
&= \frac{10^{2n+2} + 10^{n+2} - 200}{9} + 25 = \\
&= \frac{10^{2n+2} - 2 \cdot 10^{n+2} + 100 + 3 \cdot 10^{n+2} - 300}{9} + 25 = \\
&= \frac{100(10^{2n} - 2 \cdot 10^n + 1)}{9} + \frac{300(10^n - 1)}{9} + 25 = \\
&= 900 \cdot \frac{10^{2n} - 2 \cdot 10^n + 1}{81} + 300 \cdot \frac{10^n - 1}{9} + 25 = (30l + 5)^2 = \left(\underbrace{33 \dots 3}_{n} 5\right)^2
\end{aligned}$$

3. Rzucamy monetą n razy ($n \geq 2$). Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń:
A: reszka wypadła dokładnie k razy;
B: reszka wypadła więcej razy niż orzeł;
C: przynajmniej dwa razy pod rząd moneta upadła tą samą stroną

Moc przestrzeni Ω wynosi 2^n.
A: Aby policzyć moc zdarzenia A zauważmy, że rzecz sprowadza się do wyznaczenia k miejsc w ciągu n-wyrazowym. Można to zrobić na $\binom{n}{k}$ sposobów. Tę cześć zadania można również rozwiązać wykorzystując schemat Bernoulliego – zainteresowanych zachęcam do poczytania na ten temat.

$$P(A) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

B: Tu musimy rozważyć dwa przypadki:
- n jest liczbą nieparzystą. Wówczas przypadków, że reszek jest więcej niż orłów jest tyle samo, co przypadków, że orłów jest więcej niż reszek i

$$P(B) = \frac{1}{2}$$

- n jest liczbą parzystą. Wówczas musimy zapytać ile jest takich sytuacji, że reszek jest tyle samo, co orłów. Tu rzecz sprowadza się do wyznaczenia $\frac{n}{2}$ miejsc w ciągu

n-wyrazowym. Można to zrobić na $\binom{n}{\frac{n}{2}}$ sposobów. Zdarzeniu B sprzyja połowa wyników różnych od tych, gdy reszek jest tyle samo, co orłów. Ostatecznie

$$P(B) = \frac{\frac{1}{2}\left[2^n - \binom{n}{\frac{n}{2}}\right]}{2^n}$$

C: Rozważmy zdarzenie przeciwne: wypadały zawsze na przemian orzeł i reszka. Tu mamy tylko dwa zdarzenia sprzyjające: oror… i roro…

$$P(C) = 1 - \frac{2}{2^n}$$