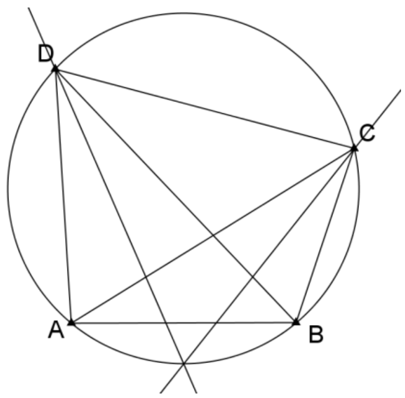
Zestaw 28

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Na płaszczyźnie dane są punkty A, B, C, D. Punkt B jest środkiem odcinka AC, oraz $|AB| = |BC| = |BD| = 17$ i $|AD| = 16$. Oblicz długość odcinka CD.

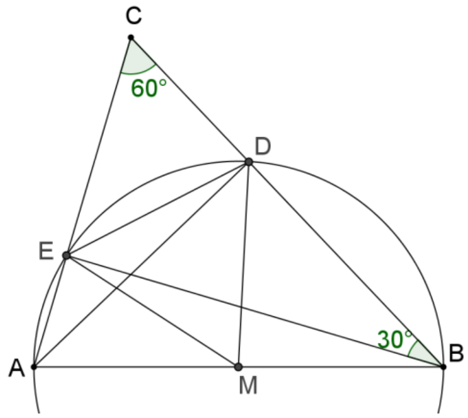
Ponieważ $|AB| = |BC| = |BD| = 17$, więc punkt B jest środkiem odcinka przechodzącego przez punkty A, C, D. Kąt ADC jest więc kątem prostym jako kąt wpisany oparty na średnicy. Możemy więc zastosować twierdzenie Pitagorasa do trójkąta ACD i policzyć że odcinek CD ma długość 30.

2. Czworokąt ABCD jest wpisany w okrąg ω. Wykazać, że dwusieczne kątów ACB i ADB przecinają się w punkcie leżącym na okręgu ω.



Dwusieczna kąta ACB dzieli go na dwa kąty o równych miarach, a to oznacza, że są one oparte na jednakowych łukach, co z kolei oznacza, że ta dwusieczna przechodzi przez środek łuku AB (tego, który nie zawiera punktu C). Analogicznie uzasadnimy, że dwusieczna kąta ADB przechodzi przez ten sam środek łuku AB.

3. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, przy czym $\measuredangle ACB = 60°$. Punkty D i E są rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów A i B na proste BC i AC. Punkt M jest środkiem boku AB. Wykazać, ze trójkąt DEM jest równoboczny.



Na czworokącie $ABDE$ da się opisać okrąg, bo kąty ADB i AEB są równe (oba są proste). Punkt M jest środkiem tego okręgu, więc odcinki EM i DM są równe jako promienie. Udowodniliśmy, że nasz trójkąt jest równoramienny. Jeśli udowodnimy, że kąt EMD ma 60°, to zadanie zrobione.

Trójkąt ADC jest prostokątny, więc kąt EAD ma 30°, a jest to kąt wpisany oparty na tym samym łuku, co kąt EMD.

KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Suma liczb dodatnich a, b, c jest równa 1. Udowodnić, że

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2\sqrt{3abc} \leq 1$$

Ujednorodnimy naszą nierówność:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2\sqrt{3abc(a+b+c)} \leq (a+b+c)^2$$
$$a^2 + b^2 + c^2 + 2\sqrt{3abc(a+b+c)} \leq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$
$$\sqrt{3abc(a+b+c)} \leq ab + bc + ca$$
$$3a^2bc + 3ab^2c + 3abc^2 \leq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2a^2bc + 2ab^2c + 2abc^2$$
$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - a^2bc - ab^2c - abc^2 \geq 0$$
$$2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - 2a^2bc - 2ab^2c - 2abc^2 \geq 0$$
$$(ab - ac)^2 + (ab - ac)^2 + (ab - ac)^2 \geq 0$$

2. Znajdź taką najmniejszą liczbę naturalną n, aby liczby $n + 1$ oraz $n - 50$ były kwadratami liczb naturalnych.

Ta liczba to 99.
Przyjmijmy, że $n + 1 = a^2$ i $n - 50 = b^2$.

$$a^2 - b^2 = 51$$
$$(a-b)(a+b) = 51$$

Może więc być:

$\begin{cases} a - b = 1 \\ a + b = 51 \end{cases}$ lub $\begin{cases} a - b = 3 \\ a + b = 17 \end{cases}$

$\begin{cases} a = 26 \\ b = 25 \end{cases}$ lub $\begin{cases} a = 10 \\ b = 7 \end{cases}$

W pierwszym przypadku $n = 675$, w drugim $n = 99$.

3. Wykaż, że dla $a \in R$ $\quad a^8 + a^2 + 1 > a^5 + a$

Rozważmy trzy przypadki

a) $a < 0$. Wówczas lewa strona jest dodatnia, a prawa ujemna.

b) $a = 0$. Zachodzi.

c) $a > 0$. Wówczas:

$$a^8 - a^5 + a^2 - a + 1 = a^8 - a^5 + \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}a^2 - a + 1 + \frac{1}{2}a^2$$
$$= \left(a^4 - \frac{1}{2}a\right)^2 + \left(\frac{1}{2}a - 1\right)^2 + \frac{1}{2}a^2 > 0$$