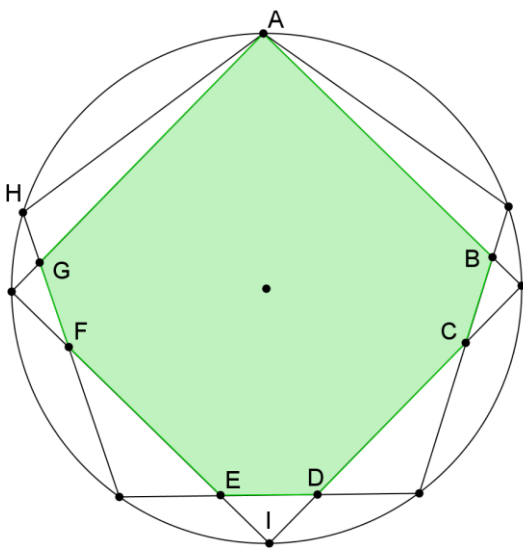




Zestaw 29

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Kwadrat i pięciokąt foremny są wpisane w ten sam okrąg i mają wspólny wierzchołek. Oblicz miarę największego z kątów wewnętrznych wielokąta będącego częścią wspólną kwadratu i pięciokąta.



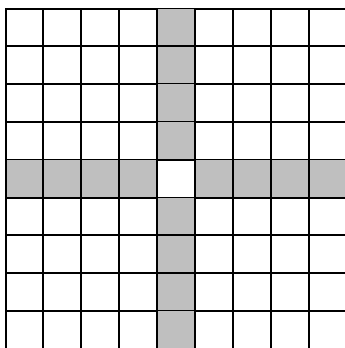
Częścią wspólną kwadratu i pięciokąta jest zielony siedmiokąt na rysunku. Do obliczeń wykorzystamy następujące fakty: kąt wewnętrzny pięciokąta ma miarę 108° , suma kątów w siedmiokącie wynosi 900° . Liczymy kąty siedmiokąta:

- kąt $GAB = 90^\circ$ - oczywiste
- kąt $AGF =$ kąt $ABC = 117^\circ$. Policzyliśmy to z trójkąta GAH . Kąt $GAH = 9^\circ$ ($(108^\circ - 90^\circ)/2$), kąt $AHG = 108^\circ$, kąt $HGA = 63^\circ$.
- kąt $FED =$ kąt $EDC = 135^\circ$ bo trójkąt EDI jest prostokątny równoramienny
- kąt $GFE =$ kąt $DCB = 153^\circ$ z sumy kątów w siedmiokącie:

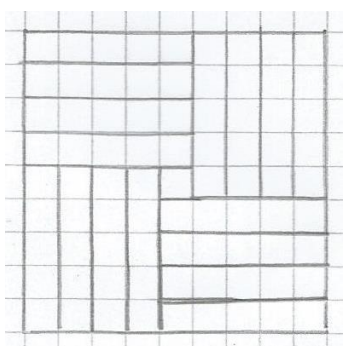
$$\frac{(900^\circ - 90^\circ - 2 \cdot 117^\circ - 2 \cdot 135^\circ)}{2} = 153^\circ$$

Największy kąt ma więc miarę 153°

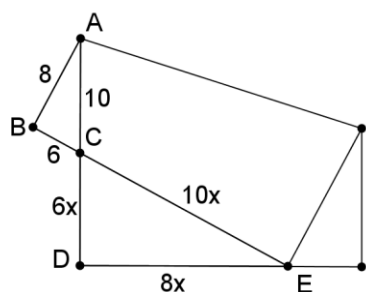
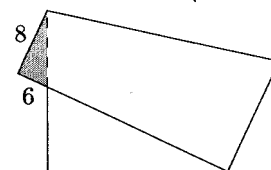
2. W grze w statki, która toczy się na planszy o wymiarach 9×9 , nasz przeciwnik gdzieś ukrył lotniskowiec, reprezentowany przez prostokąt o wymiarach 5×1 lub 1×5 . Jaka jest minimalna liczba strzałów, które musimy oddać, by choć raz trafić lotniskowiec, niezależnie od jego lokalizacji? Odpowiedź uzasadnij.



Potrzebujemy 16 strzałów. Zauważmy, że jeżeli ostrzelamy pola zacienione na rysunku powyżej, to na pewno lotniskowiec się nie uchwyci (na rysunku nie ma prostokąta o wymiarach 5×1 , który nie zostałby ostrzelany). Jest to minimalna liczba strzałów, co można wydedukować z poniższego rysunku, na którym jest 16 nienachodzących na siebie możliwych położeń lotniskowca.



3. Kwadratowa kartka papieru jest zgięta w taki sposób, że jeden z jej wierzchołków leży dokładnie na jednej z krawędzi kartki. Jak pokazano na rysunku, pewien trójkąt wychodzi poza wyjściowy kwadrat. Długości dwóch boków tego trójkąta zaznaczono na rysunku. Oblicz długość boku kartki.



Z Pitagorasa liczymy długość odcinka AC – wynosi ona 10.

Trójkąty ABC i CDE są podobne – obydwa są prostokątne i kąty BCA i DCE są wierzchołkowe, stąd oznaczenia jak na rysunku. Odcinek BE i łamana DAB mają jednakowe długości, bo są to boki kwadratowej kartki. Stąd równość:

$$6 + 10x = 6x + 10 + 8$$

$$x = 3$$

Bok kwadratu ma $6 + 10x$ czyli 36.

KLASY TRZECIE

1. Rozwiąż nierówność

$$3 - \log_{0,5} x - (\log_{0,5} x)^2 - (\log_{0,5} x)^3 - \dots \geq 4 \log_{0,5} x$$

Wyznaczmy dziedzinę:

$$\begin{aligned} x &> 0 \\ |\log_{0,5} x| < 1 &\Leftrightarrow x \in (0,5; 2) \end{aligned}$$

Podstawiamy t za $\log_{0,5} x$ i rozwiązujemy nierówność:

$$\begin{aligned} 3 - t - t^2 - t^3 - \dots &\geq 4t \\ t + t^2 + t^3 + \dots &\leq 3 - 4t \\ \frac{t}{1-t} &\leq 3 - 4t \end{aligned}$$

Możemy pomnożyć obydwie strony przez $1 - t$ bo $t < 1$. Dostajemy nierówność kwadratową, której rozwiązaniem jest $t \in (-\infty; 0,5) \cup (1,5; \infty)$, a więc

$$\begin{aligned} \log_{0,5} x &\leq 0,5 \\ x &\geq \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

lub

$$\begin{aligned} \log_{0,5} x &\geq 1,5 \\ x &\leq \frac{\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

Po uwzględnieniu dziedziny $x \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 2\right)$.

2. Rozwiąż nierówność

$$\sqrt{x^2 - 16x + 64} + x \leq 7 + \sqrt{x^2 + 6x + 9}$$

Naszą nierówność można zapisać w postaci:

$$|x - 8| + x \leq 7 + |x + 3|$$

Rozpatrując trzy przypadki dostajemy $x \in (-\infty, -4) \cup (-2, 18)$

3. Znajdź wszystkie liczby pierwsze p o tej własności, że liczba $p + 11$ jest dzielnikiem liczby $p(p + 1)(p + 2)$.

Rozważmy dwa przypadki:

a) $p = 11$. Wtedy warunki zadania są spełnione.

b) $p \neq 11$. Wówczas liczby p i $p + 11$ są względnie pierwsze – gdyby miały wspólny dzielnik większy od 1, to byłby on również dzielnikiem liczby 11, a to jest niemożliwe, bo $p \neq 11$ i 11 jest liczbą pierwszą. To oznacza, że $(p + 11)$ musi dzielić

$$(p + 1)(p + 2)$$

Przekształćmy wyrażenie $(p + 1)(p + 2)$ aby się dowiedzieć czegoś więcej o liczbie p .

$(p + 1)(p + 2) = p^2 + 3p + 2 = p^2 + 11p - 8p - 88p + 90 = (p + 11)(p - 8) + 90$
Przekształciliśmy tak, żeby dostać czynnik $(p + 11)$. Widzimy teraz, że liczba $p + 11$, aby dzielić $(p + 1)(p + 2)$ musi być dzielnikiem liczby 90. Sprawdzamy wszystkie dzielniki 90 i wychodzi nam, że $p \in \{7, 19, 79\}$.

Ostatecznie $p \in \{7, 11, 19, 79\}$.