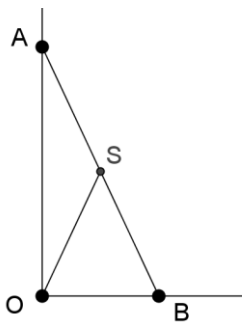




## Zestaw 30

### KLASY PIERWSZE I DRUGIE

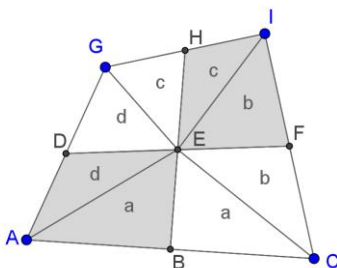
1. Odcinek  $AB$  ślizga się po ramionach kąta prostego w ten sposób, że punkt  $A$  należy do jednego ramienia, a punkt  $B$  do drugiego. Jaki kształt będzie miała droga, którą przebędzie środek odcinka  $AB$ . Odpowiedź uzasadnij.



Wykażemy, że droga, którą przebędzie środek odcinka  $AB$  ma kształt łuku okręgu.

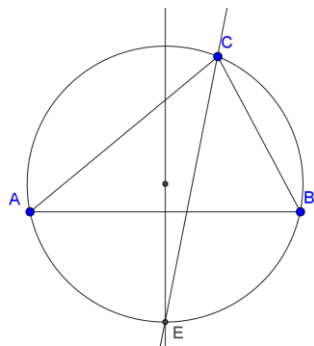
Rozważmy trójkąt  $OBA$ . Odcinek  $OS$  jest w nim środkową. Środkowa w trójkącie prostokątnym ma długość równą połowie przeciwprostokątnej (bo jest promieniem okręgu opisanego na trójkącie). Gdy poruszamy odcinkiem  $AB$  zgodnie z treścią zadania długość przeciwprostokątnej  $AB$  jest stała, a więc również stała jest długość odcinka  $OS$ . To oznacza, że odległość punktu  $S$  od punktu  $O$  jest stała, a więc porusza się on po okręgu o środku w punkcie  $O$ .

2. Czworokąt wypukły podzielono na cztery części łącząc środki jego boków jak na rysunku. Wykaż, że suma pól części zacienionych jest równa sumie pól części niezacienionych.



Trójkąty  $ABE$  i  $BCE$  mają równe podstawy i taką samą wysokość, dlatego ich pola są równe, zostały więc oznaczone tą samą literą  $a$ . Podobnie uzasadnimy oznaczenia literowe dla pozostałych pól trójkątów. Suma pól części zacienionych jest równa  $a + b + c + d$  i suma pól części niezacienionych też jest równa  $a + b + c + d$ .

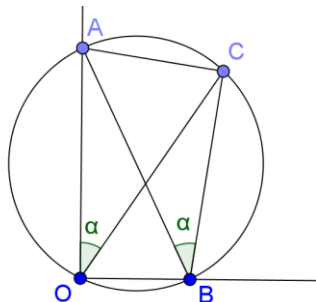
3. Wykaż, że w trójkącie  $ABC$  dwusieczna kąta  $ACB$  i symetralna boku  $AB$  przecinają się na okręgu opisanym na tym trójkącie.



Pokażemy, że zarówno dwusieczna kąta  $ACB$  i symetralna boku  $AB$  przechodzą przez środek łuku  $AB$ , na rysunku powyżej oznaczony literą  $E$ . Symetralna przechodzi przez punkt  $E$  bo jest osią symetrii odcinka kołowego  $ABE$ . Dwusieczna dzieli kąt  $ACB$  na dwa równe kąty. Jak są równe, to równe też są łuki, na których są oparte. Dwusieczna przechodzi więc przez punkt, który dzieli łuk  $AB$  na dwie równe części, a to jest punkt  $E$ .

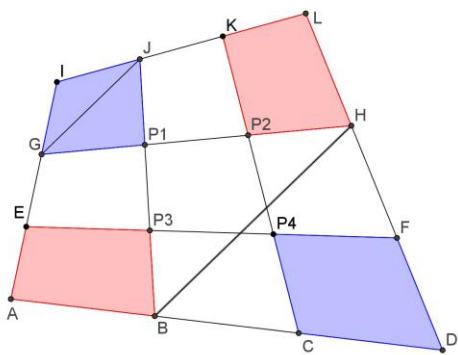
## KLASY TRZECIE

1. Trójkąt prostokątny  $ABC$  ślizga się po ramionach kąta prostego w ten sposób, że punkt  $A$  należy do jednego ramienia, a punkt  $B$  do drugiego. Jaki kształt będzie miała droga, którą przebędzie wierzchołek kąta prostego  $C$ . Odpowiedź uzasadnij.

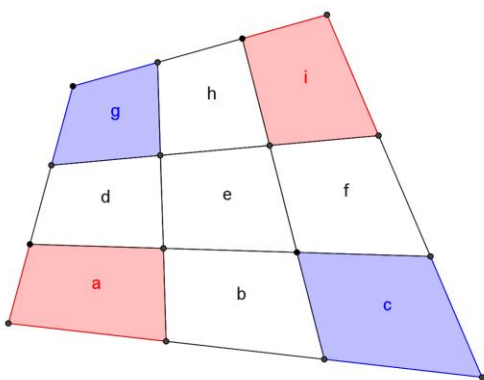


Na czworokącie  $OBCA$  można opisać okrąg, bo kąty  $AOB$  i  $ACB$  są proste. Kąty  $AOC$  i  $ABC$  są równe, bo są oparte na tym samym łuku. To oznacza, że niezależnie od położenia odcinka  $AB$  (o ile tylko, oczywiście, zachowujemy warunki zadania) kąt  $AOC$  wynosi  $\alpha$ . Punkt  $C$  porusza się więc po prostej nachylonej do prostej  $AO$  pod kątem  $\alpha$ . Jego droga jest fragmentem tej prostej – odcinkiem.

2. Czworokąt wypukły podzielono na dziewięć części dzieląc każdy bok na trzy równe części i łącząc punkty podziału jak na rysunku. Wykaż, że suma pól części czerwonych jest równa sumie pól części niebieskich. Uwaga! Nie jest oczywiste, że wszystkie odcinki łączące punkty na przeciwległych bokach zostały podzielone na trzy równe części.



Najpierw wykażemy, że punkty  $P_1, P_2, P_3, P_4$  dzielą odcinki  $GH, EF, JB$  i  $KC$  na trzy równe części. Odcinki  $JG$  i  $HB$  są równoległe do przekątnej  $AL$  (z twierdzenia odwrotnego do Talesa), a więc są równoległe między sobą. To oznacza, że trójkąty  $GJP_1$  i  $BHP_1$  są podobne.  $JG$  stanowi  $\frac{1}{3}$  przekątnej  $AL$ , a  $HB$   $\frac{2}{3}$  tej przekątnej (dlaczego?), czyli skala podobieństwa wynosi 1:2, a to wystarcza do stwierdzenia, że punkt  $P_1$  leży w jednej trzeciej odcinków  $GH$  i  $BJ$ . Dowód dla pozostałych punktów jest podobny.



Litery na rysunku powyżej oznaczają pola poszczególnych części naszego czworokąta. Aby udowodnić, że suma pól części czerwonych jest równa sumie pól części niebieskich skorzystamy z rozwiązania zadania 2 dla klas 1, 2 w tym zestawie. Wynika z niego, że

$$\begin{aligned} a + e &= b + d \\ b + f &= e + c \\ d + h &= e + g \\ e + i &= h + f \end{aligned}$$

Po dodaniu stronami i redukcji dostajemy

$$a + i = g + c$$

3. Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} a^2 + 2 = 2a + b \\ b^2 + 2 = 2b + c \\ c^2 + 2 = 2c + d \\ d^2 + 2 = 2d + e \\ e^2 + 2 = 2e + a \end{cases}$$

Przekształćmy nasz układ równań:

$$\begin{cases} (a-1)^2 = b-1 \\ (b-1)^2 = c-1 \\ (c-1)^2 = d-1 \\ (d-1)^2 = e-1 \\ (e-1)^2 = a-1 \end{cases}$$

czyli

$$a-1 = (e-1)^2 = (d-1)^4 = (c-1)^8 = (b-1)^{16} = (a-1)^{32}$$

Jeżeli  $a-1 = (a-1)^{32}$  to oznacza, że  $a-1 = 0$  lub  $a-1 = 1$ , czyli

$$a = 1 \text{ lub } a = 2$$

Teraz już łatwo policzyć, że układ spełniają dwie piątki liczb:

$$a = b = c = d = e = 1$$

$$a = b = c = d = e = 2$$