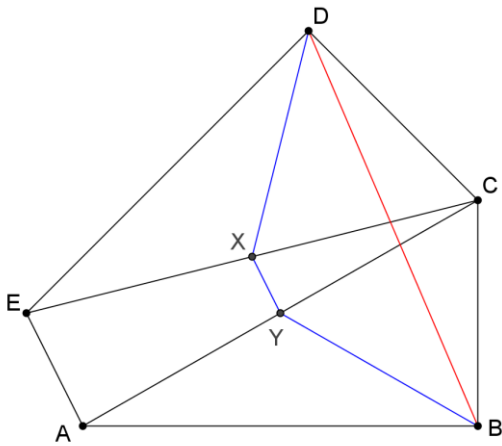




Zestaw 31

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ kąty przy wierzchołkach B i D są proste. Wykaż, że obwód trójkąta ACE jest nie mniejszy od $2 \cdot BD$.

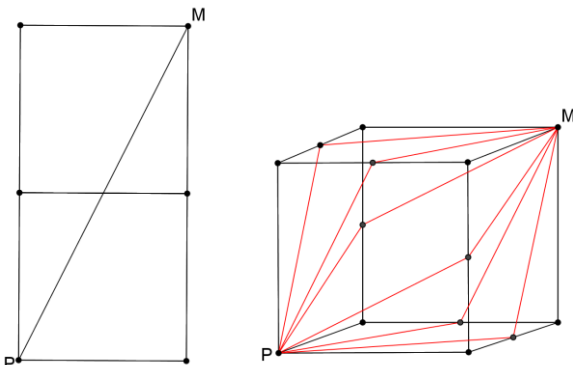


Wykorzystamy dwa twierdzenia: 1) w trójkącie odcinek łączący środki ramion jest dwa razy krótszy od podstawy, 2) w trójkącie prostokątnym środkowa poprowadzona z wierzchołka kąta prostego jest dwa razy krótsza od przeciwprostokątnej. Z uogólnionej nierówności trójkąta i z powyższych twierdzeń wynika że:

$$2BD \leq 2DX + 2XY + 2YB = CE + EA + AC$$

2. Na przeciwległych wierzchołkach sześciennego pudła o krawędzi 1 siedzą pająk i mucha. Pająk chce przejść najkrótszą możliwą drogą po powierzchni pudła do wierzchołka, w którym znajduje się mucha. Jak długą drogę musi pokonać? Którędy powinien iść? Ile ma do wyboru różnych najkrótszych dróg?

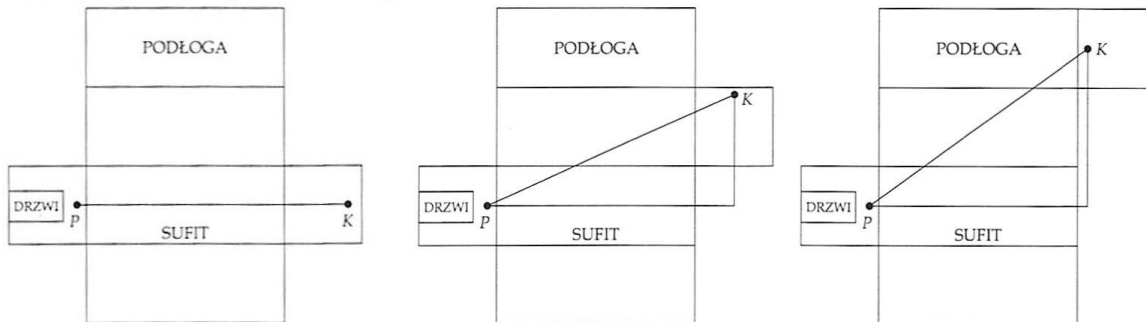
Aby odpowiedzieć na te pytania wystarczy popatrzeć na dwie sąsiadujące ściany sześcianu:



Do wyboru jest 6 dróg. Każda ma długość $\sqrt{5}$.

3. Budowane pomieszczenie w kształcie prostopadłościanu ma mieć wysokość 3 m, podłoga zaś ma mieć wymiary $3\text{ m} \times 7,5\text{ m}$. W pomieszczeniu nie będzie okien, jedynie drzwi na jednej kwadratowej ścianie. Prąd do pomieszczenia ma być doprowadzony nad drzwiami, 25 cm pod sufitem, w odległości 1,5 m od obu sąsiednich ścian. Jedyne gniazdko ma natomiast być umieszczone na przeciwległej ścianie, też w odległości 1,5 m od obu sąsiednich ścian, ale 25 cm nad podłogą. Jak, chcąc zużyć jak najmniej kabla, poprowadzić go od puszek z prądem do kontaktu?

Najkrótszą drogą między dwoma punktami jest odcinek łączący te punkty. Żeby zobaczyć ten odcinek musimy go narysować na siatce naszego pokoju. Popatrzmy na trzy różne siatki naszego pokoju



Wystarczy teraz w każdym przypadku policzyć odległość PK , tam, gdzie trzeba, stosując twierdzenie Pitagorasa. W pierwszym przypadku jest to 10,5 m, w drugim około 10,18, a w trzecim 10 i to jest najkrótsza droga.

KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Suma kwadratów dowolnych trzech liczb spośród $a, b, c, d, e > 0$ jest równa sumie sześciątów dwóch pozostałych. Wyznaczyć te liczby.

Odejmując stronami równości $a^2 + b^2 + c^2 = d^3 + e^3$ oraz $a^2 + b^2 + d^2 = c^3 + e^3$, otrzymamy $c^2(c + 1) = d^2(d + 1)$, z czego można wywnioskować, że $c = d$ i konsekwentnie wszystkie te liczby są równe. Mamy więc $3a^2 = 2a^3$, które to równanie ma dwa rozwiązania: 0 i $\frac{3}{2}$, z czego pierwsze nie należy do dziedziny. Ostatecznie

$$a = b = c = d = e = \frac{3}{2}$$

2. Liczby rzeczywiste x, y i z spełniają warunki: $|x| \leq |y - z|$, $|y| \leq |z - x|$, $|z| \leq |x - y|$, Dowieść, że jedna z nich jest równa sumie pozostałych.

Podnosząc obustronnie do kwadratu pierwszą nierówność, otrzymamy

$$(x + y - z)(x - y + z) \leq 0$$

Trzeba wziąć pod uwagę jeszcze dwie symetryczne jej wersje i zauważyć, że iloczyn lewych stron wszystkich trzech jest niedodatni, jednocześnie będąc kwadratem liczby rzeczywistej czyli równa się 0. Stąd już łatwo wynika teza.

3. Wykaż, że funkcja $f(x) = (x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a)$ ma dla dowolnej trójki liczb rzeczywistych a, b, c , miejsce zerowe.

Wyrażenie jest symetryczne, więc b.z.o. można przyjąć, że $a \leq b \leq c$. Wówczas $f(a)$ jest nieujemne, a $f(b)$ jest niedodatnie. Z twierdzenia Darboux wynika więc, że w przedziale $[a, b]$ jest miejsce zerowe.