Zestaw 32

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. W trójkącie prostokątnym suma długości przyprostokątnych wynosi $\sqrt{18}$*, a przeciwprostokątna ma długość 4. Oblicz pole tego trójkąta.*

Pole to wynosi $\frac{1}{2}$.

Oznaczmy przyprostokątne przez a i b, a przeciwprostokątną przez c.
Mamy więc:
$a + b = \sqrt{18}$ i $a^2 + b^2 = 16$ (bo $c = 4$)
Podnosimy pierwszą równość do kwadratu:

$$a^2 + 2ab + b^2 = 18$$

Korzystamy z drugiej równości wstawiając 16 w miejsce $a^2 + b^2$.

$$16 + 2ab = 18$$

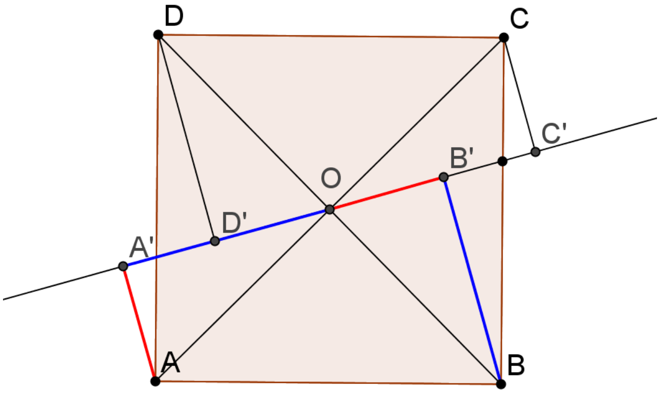
$$2ab = 2$$

$$\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}$$

a $\frac{1}{2}ab$ to przecież pole trójkąta prostokątnego.

2. Dany jest kwadrat ABCD o boku 1 oraz prosta l *przechodząca przez jego środek. Niech* a, b, c, d *oznaczają odpowiednio odległości punktów* A, B, C, D *od prostej* l*. Wykaż, że* $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ *.*

W sytuacji, gdy prosta l zawiera dwa wierzchołki kwadratu żądana równość oczywiście zachodzi. Zajmijmy się przypadkiem, gdy prosta l nie zawiera wierzchołków kwadratu.



Oznaczmy przez A', B', C', D' rzuty punktów odpowiedni A, B, C, D na prostą l. Wykażemy najpierw, że trójkąty $AA'O$ i $BB'O$ są przystające. Odcinki AO i BO są równe (obydwa są równe połowie przekątnej kwadratu), jeśli oznaczymy przez α kąt $A'OA$, to zarówno kąt $A'AO$, jak i kąt $B'OB$ będą miały miarę $90^\circ - \alpha$, a kąt OBB' będzie miał miarę α. Zachodzi więc przystawanie z cechy kbk. Czerwone odcinki mają więc długość a, a niebieskie – b. Z tw. Pitagorasa dla trójkąta $AA'O$ dostajemy $a^2 + b^2 = \frac{1}{2}$. Podobnie z drugiej strony dostaniemy, że $c^2 + d^2 = \frac{1}{2}$, co po zsumowaniu stronami daje tezę.

3. Czy istnieje trójkąt prostokątny, którego jeden z boków ma długość 2026, a długości pozostałych boków wyrażają się liczbami całkowitymi?

Taki trójkąt istnieje. Jego boki to 2026, 1026168, 1026170. Szukanie takich trójkątów ułatwia twierdzenie mówiące, że mając dwie liczby naturalne m i n, $m > n$, możemy dostać trójkę pitagorejską a, b, c tak: $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$, $c = m^2 + n^2$

KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Suma liczb dodatnich a, b, c jest równa 1. Udowodnić, że

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2\sqrt{3abc} \leq 1$$

Ujednorodnimy naszą nierówność:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2\sqrt{3abc(a+b+c)} \leq (a+b+c)^2$$
$$a^2 + b^2 + c^2 + 2\sqrt{3abc(a+b+c)} \leq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$
$$\sqrt{3abc(a+b+c)} \leq ab + bc + ca$$
$$3a^2bc + 3ab^2c + 3abc^2 \leq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2a^2bc + 2ab^2c + 2abc^2$$
$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - a^2bc - ab^2c - abc^2 \geq 0$$
$$2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - 2a^2bc - 2ab^2c - 2abc^2 \geq 0$$
$$(ab - ac)^2 + (ab - ac)^2 + (ab - ac)^2 \geq 0$$

2. Znajdź taką najmniejszą liczbę naturalną n, aby liczby $n + 1$ oraz $n - 50$ były kwadratami liczb naturalnych.

Ta liczba to 99.

Przyjmijmy, że $n + 1 = a^2$ i $n - 50 = b^2$.

$$a^2 - b^2 = 51$$
$$(a - b)(a + b) = 51$$

Może więc być:

$\begin{cases} a - b = 1 \\ a + b = 51 \end{cases}$ lub $\begin{cases} a - b = 3 \\ a + b = 17 \end{cases}$

$\begin{cases} a = 26 \\ b = 25 \end{cases}$ lub $\begin{cases} a = 10 \\ b = 7 \end{cases}$

W pierwszym przypadku $n = 675$, w drugim $n = 99$.

3. Wykaż, że dla $a \in R \quad a^8 + a^2 + 1 > a^5 + a$

Rozważmy trzy przypadki

a) $a < 0$. Wówczas lewa strona jest dodatnia, a prawa ujemna.

b) $a = 0$. Zachodzi.

c) $a > 0$. Wówczas:

$$a^8 - a^5 + a^2 - a + 1 = a^8 - a^5 + \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}a^2 - a + 1 + \frac{1}{2}a^2$$
$$= \left(a^4 - \frac{1}{2}a\right)^2 + \left(\frac{1}{2}a - 1\right)^2 + \frac{1}{2}a^2 > 0$$