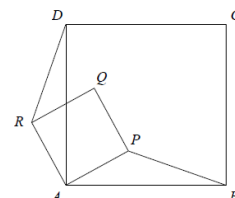




Zestaw 29

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

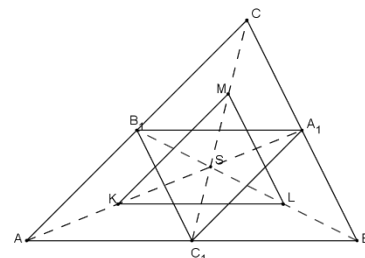
1. Czworokąty $ABCD$ i $APQR$ są kwadratami (patrz rysunek). Udowodnij, że $|BP| = |DR|$.



Równość $|BP| = |DR|$ wynika z przystawiania trójkątów RAD i PAB . Są one przystające z cechy bkb. Równe boki to RA i PA ($APQR$ jest kwadratem) oraz AD i AB ($ABCD$ jest kwadratem). Jeżeli kąt DAP oznaczmy przez α , to oba kąty RAD i PAB mają miarę $90^\circ - \alpha$.

2. Punkt S jest środkiem ciężkości trójkąta ABC , punkty A_1, B_1, C_1 są odpowiednio środkami boków BC, AC, AB , zaś punkty K, L, M – środkami odcinków SA, SB, SC (rysunek obok).

Wykaż, że $\triangle A_1B_1C_1 \equiv \triangle KLM$.



Są one przystające z cechy bbb. Przykładowo bok KL jest dwa razy krótszy od boku AB , bo jest linią środkową w trójkącie ABS i bok A_1B_1 też jest dwa razy krótszy od AB , bo jest linią środkową w trójkącie ABC . Równości pozostałych boków udowodnimy podobnie.

3. Oblicz wartość ułamka $\frac{36 \cdot 18^n - 8 \cdot 2^{n-4} \cdot 9^n - 3^{n+1} \cdot 6^{n+1}}{18^{n-1}}$, gdzie n jest liczbą naturalną.

$$\frac{36 \cdot 18^n - 8 \cdot 2^{n-4} \cdot 9^n - 3^{n+1} \cdot 6^{n+1}}{18^{n-1}} = \frac{36 \cdot 18^n - \frac{1}{2} \cdot 18^n - 18 \cdot 18^n}{\frac{1}{18} \cdot 18^n} = \frac{17 \frac{1}{2}}{\frac{1}{18}} = 315$$

KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Oblicz $\sqrt{\underbrace{44 \dots 4}_{2n} + \underbrace{11 \dots 1}_{n+1} - \underbrace{66 \dots 6}_n}$

$$\begin{aligned}
\underbrace{44 \dots 4}_{2n} + \underbrace{11 \dots 1}_{n+1} - \underbrace{66 \dots 6}_n &= \frac{4}{9} \cdot \underbrace{99 \dots 9}_{2n} + \frac{1}{9} \cdot \underbrace{99 \dots 9}_{n+1} - \frac{6}{9} \cdot \underbrace{99 \dots 9}_n \\
&= \frac{4}{9} \cdot (10^{2n} - 1) + \frac{1}{9} \cdot (10^{n+1} - 1) - \frac{6}{9} \cdot (10^n - 1) \\
&= \frac{1}{9} \cdot (4 \cdot 10^{2n} - 4 + 10 \cdot 10^n - 1 - 6 \cdot 10^n + 6) \\
&= \frac{1}{9} \cdot (4 \cdot 10^{2n} + 4 \cdot 10^n + 1) = \frac{4}{9} \cdot 10^{2n} + \frac{4}{9} \cdot 10^n + \frac{1}{9} \\
&= \frac{4}{9} \cdot 10^{2n} - \frac{8}{9} \cdot 10^n + \frac{4}{9} + \frac{12}{9} \cdot 10^n - \frac{12}{9} + 1 \\
&= \frac{4}{9} \cdot (10^{2n} - 2 \cdot 10^n + 1) + 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot (10^n - 1) + 1 = \left(\frac{2}{3} \cdot (10^n - 1) + 1 \right)^2 \\
&= \left(\frac{2}{3} \cdot \underbrace{99 \dots 9}_n + 1 \right)^2 = \left(\underbrace{66 \dots 6}_n + 1 \right)^2
\end{aligned}$$

Szukana liczba ma więc postać $\underbrace{66 \dots 6}_{n-1} 7$.

2. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele trójek (a, b, c) dodatnich liczb całkowitych spełniających równość.

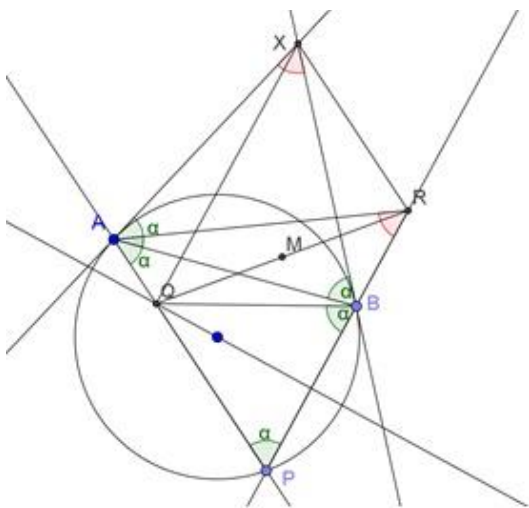
$$a^3 + 3b^6 = c^2$$

$$a^3 + 3b^6 = c^2$$

Wystarczy wziąć b – dowolna liczba całkowita dodatnia, $a = b^2$, $c = 2b^3$

3. Dany jest okrąg o i jego cięciwa AB niebędąca średnicą. Na okręgu o wybieramy punkt P , różny od punktów A i B . Punkty Q i R leżą odpowiednio na prostych PA i PB , przy czym $QP = QB$ oraz $RP = RA$. Punkt M jest środkiem odcinka QR . Wykazać, że wszystkie uzyskane w ten sposób proste PM (odpowiadające różnym położeniom punktu P na okręgu o) mają punkt wspólny.

Punktem wspólnym wszystkich prostych PM jest punkt przecięcia stycznych do okręgu o przechodzących przez punkty A i B (punkt X).



Trójkąty ABX , QPB , APR są równoramienne. Udowodnimy, że wszystkie kąty oznaczone jako α mają jednakowe miary. Kąty APB i ABX to kąty wpisany i dopisany oparte na tym samym łuku, a równość pozostałych kątów wynika z równoramienności wspomnianych trójkątów. Z trójkątów ABX i APR wyliczymy miary kątów czerwonych. Obydwa mają miarę $180^\circ - 2\alpha$. Ponieważ te kąty są równe, na czworokącie $ABRX$ da się opisać okrąg. Do tego okręgu należy też punkt Q , bo suma miar kątów AQB i AXB wynosi 180° (dlaczego?). Kąt QXR jako oparty na tym samym łuku, co kąt QAR ma też miarę α . Kąt BRX ma miarę $180^\circ - \alpha$, bo kąt BAX ma miarę α . Ustaliliśmy więc, że kąty QPR i QXR obydwa mają miarę α , a kąt PRX ma miarę $180^\circ - \alpha$. To wystarczy, by stwierdzić, że czworokąt $PRXQ$ jest równoległobokiem. Prosta PM jako przechodząca przez środek przekątnej QR zawiera przekątną PX , a tym samym przechodzi przez punkt X .