



Zestaw 32

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Znajdź wszystkie pary liczb całkowitych (x, y) spełniające równanie:

$$x^4 = y^4 + 1223334444$$

Dane równanie jest sprzeczne.

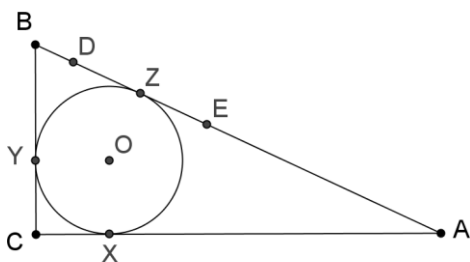
Przekształćmy je stosując wzór $(a^2 - b^2) = (a + b)(a - b)$:

$$x^4 - y^4 = 1223334444$$

$$(x^2 + y^2)(x + y)(x - y) = 1223334444$$

Jeżeli liczby x i y są różnej parzystości, to po lewej stronie mamy liczbę nieparzystą, a po prawej parzystą. Jeżeli są tej samej parzystości to lewa strona jest iloczynem trzech liczb parzystych, jest więc podzielna przez 8, a prawa przez 8 się nie dzieli.

2. Na okręgu o promieniu 1 opisano trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym przy wierzchołku C . Na przeciwprostokątnej AB tego trójkąta wybrano takie punkty D i E , że zachodzą równości $AD = AC$ i $BE = BC$. Oblicz długość odcinka DE .



Oznaczmy Przez X, Y, Z punkty styczności okręgu wpisanego odpowiednio z bokami AC, BC, AB . Czworokąt $CXOY$ jest kwadratem o boku 1 (promienie są prostopadłe do stycznych, boki OY i OX są równe jako promienie). Wiemy, że $AD = AC$, dodatkowo z twierdzenia o stycznej $AZ = AX$. Z tego wynika, że $DZ = CX = 1$. Podobnie pokażemy, że $ZE = 1$. Długość odcinka DE wynosi 2.

3. Dane są liczby 1, 2, 3, 4, 5, 6. Wykonujemy operację polegającą na dodaniu do dwóch spośród nich liczby 1. Na tak utworzonym ciągu liczb powtarzamy wielokrotnie tę operację. Czy w pewnym momencie możemy uzyskać ciąg stały, tj. mający wszystkie wyrazy równe?

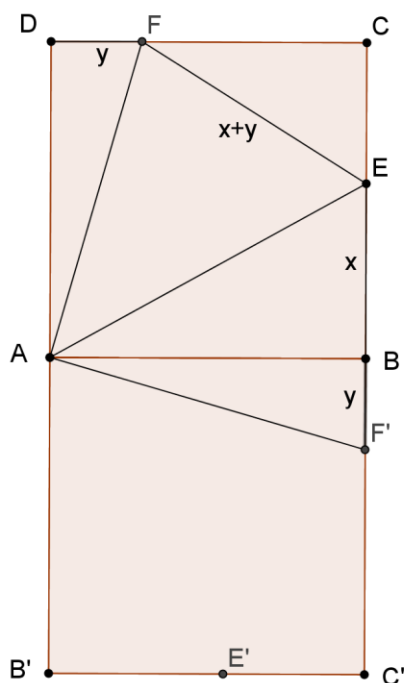
Suma liczb od 1 do 6 równa się 21. Jest to liczba nieparzysta. Dodając dwie jedynki znowu dostaniemy liczbę nieparzystą. Tymczasem gdybyśmy mieli ciąg stały suma jego wyrazów

byłaby parzysta (bo podzielna przez 6). Otrzymana sprzeczność dowodzi, że nigdy nie otrzymamy ciągu stałego.

KLASY TRZECIE

1. W kwadracie $ABCD$ wybieramy na boku BC taki punkt E , a na boku CD taki punkt F , że $|EF| = |BE| + |FD|$. Udowodnij, że kąt EAF ma 45° .

Obróćmy kwadrat wokół punktu A tak, żeby punkt D przeszedł na punkt B .



Czworokąt $AF'EF$ jest deltoidem, więc odcinek AE jest dwusieczną kąta FEF' . Jest to kąt prosty, bo obracaliśmy o 90° , stąd wynika, że kąt FAE ma 45° .

2. Pole powierzchni wielościanu opisanego na kuli o promieniu 1 wynosi 12. Oblicz objętość tego wielościanu.

Wielościan o n ścianach opisany na kuli można podzielić na n ostrosłupów, których podstawami są ściany wielościanu, a wysokościami promienie kuli. Objętość takiego ostrosłupa wyraża się wzorem

$$V = \frac{1}{3} P \cdot r$$

gdzie P to pole powierzchni wielościanu, a r – promień kuli wpisanej.

W naszym zadaniu jest jednak haczyk: pole kuli o promieniu 1 wynosi 4π , a to jest więcej niż 12. Wielościan opisany w zadaniu nie istnieje.

3. Liczba rzeczywista x spełnia równanie $x^3 + 4x = 8$. Znajdź wartość wyrażenia $x^7 + 64x^2$.

Wyliczmy x^3 . $x^3 = 8 - 4x$. Podstawiamy to do wyrażenia $x^7 + 64x^2$.

$$\begin{aligned} x(8 - 4x)^2 + 64x^2 &= 64x - 64x^2 + 16x^3 + 64x^2 = 64x + 16x^3 = 16(x^3 + 4x) = \\ &= 16 \cdot 8 = 128 \end{aligned}$$