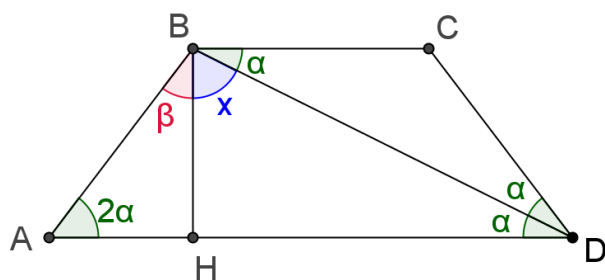




Zestaw 2

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. W trapezie równoramiennym $ABCD$, w którym $AB = CD$, opuszczono wysokość BH i poprowadzono przekątną BD . Przekątna ta jest dwusieczną kąta CDA . Udowodnij, że kąt HBD jest równy sumie kątów ABH i CBD .



Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku (kąt CBD ma taką samą miarę jak kąt ADB , bo są to kąty naprzemianległe).

Zauważmy, że $\beta = 90^\circ - 2\alpha$ (z trójkąta ABH) oraz $x = 90^\circ - \alpha$ (z trójkąta HDB)

$$\alpha + \beta = x \quad \text{bo} \quad \alpha + 90^\circ - 2\alpha = 90^\circ - \alpha$$

2. Uzasadnij, że nie istnieją takie liczby całkowite a, b, c, d, e , że

$$a + b + c + d + e = 2026 \quad \text{i} \quad abcde = 3^{2027}$$

Iloczyn $abcde$ jest nieparzysty, bo jest potęgą trójki. To oznacza, że każda z liczb a, b, c, d, e , jest nieparzysta. Liczba $a + b + c + d + e$ też jest nieparzysta jako suma pięciu liczb nieparzystych. Nie może więc równać się 2026.

3. Czy istnieje taka trójka (a, b, c) dodatnich liczb nieparzystych, że

$$\sqrt{a-c} + \sqrt{b-c} = \sqrt{a+b}$$

Odpowiedź uzasadnij.

Takie liczby nie istnieją. Podnieśmy równość z zadania stronami do kwadratu. Dostaniemy:

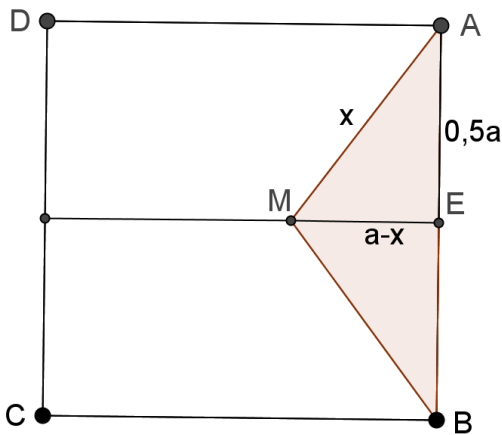
$$\begin{aligned} a - c + b - c + 2\sqrt{(a-c)(b-c)} &= a + b \\ 2\sqrt{(a-c)(b-c)} &= 2c \\ \sqrt{(a-c)(b-c)} &= c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (a-c)(b-c) &= c^2 \\
 ab - ac - bc + c^2 &= c^2 \\
 ab &= ac + bc \\
 ab &= c(a+b)
 \end{aligned}$$

Mamy sprzeczność bo lewa strona jest nieparzysta, a prawa parzysta.

KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Wewnątrz kwadratu $ABCD$ obrano punkt M w równej odległości od boku CD i od wierzchołków A i B . Jaką część pola kwadratu stanowi pole trójkąta ABM ?



Oznaczmy bok kwadratu przez a , a odległość punktu M od wierzchołka A przez x . Stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkąta AME dostajemy:

$$\begin{aligned}
 (0,5a)^2 + (a-x)^2 &= x^2 \\
 x &= \frac{5}{8}a \\
 a-x &= \frac{3}{8}a
 \end{aligned}$$

Teraz możemy liczyć pole trójkąta ABM

$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{3}{8}a = \frac{3}{16}a^2$$

2. Oblicz $\sqrt{\underbrace{11 \dots 1}_{2n} - \underbrace{22 \dots 2}_n}$

Oznaczmy liczbę $\underbrace{11 \dots 1}_n$ przez x . Wówczas $\underbrace{11 \dots 1}_{2n} - \underbrace{22 \dots 2}_n = 10^n x + x - 2x = 10^n x - x = \underbrace{99 \dots 9}_n \cdot x = 9x \cdot x = 9x^2$

Mamy więc:

$$\sqrt{\underbrace{11 \dots 1}_{2n} - \underbrace{22 \dots 2}_n} = \sqrt{9x^2} = 3x = \underbrace{33 \dots 3}_n$$

3. Ile wynosi suma liczb n -tego wiersza trójkątnej tablicy:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & \\ & & & & & & \\ & & & 2 & & 3 & \\ & & 4 & & 5 & & 6 \\ & 7 & & 8 & & 9 & & 10 \\ 11 & & 12 & & 13 & & 14 & & 15 \\ \dots\dots\dots & & & & & & & & ? \end{array}$$

Odpowiedź uzasadnij.

Po pierwsze zauważmy, że ostatnimi liczbami kolejnych wierszy są: 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28... Są to tzw. liczby trójkątne: n -ta liczba trójkątna jest sumą n kolejnych liczb naturalnych (np. czwarta liczba trójkątna 10 jest sumą czterech kolejnych liczb naturalnych $1 + 2 + 3 + 4$) i jako taka wyraża się wzorem $\frac{(1+n) \cdot n}{2}$.

Sumę liczb n -tego wiersza policzymy odejmując od sumy wszystkich liczb aż do n -tego wiersza sumę wszystkich liczb do $(n - 1)$ -szego wiersza.

Ostatnią liczbą n -tego wiersza jest $\frac{(1+n) \cdot n}{2}$. Wszystkie liczby aż do końca n -tego wiersza dają więc sumę

$$\frac{1 + \frac{(1+n) \cdot n}{2}}{2} \cdot \frac{(1+n) \cdot n}{2} = \frac{n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n}{8}$$

W podobny sposób liczymy sumę wszystkich liczb aż do końca $(n - 1)$ -szego wiersza.

$$\frac{1 + \frac{(1-n) \cdot n}{2}}{2} \cdot \frac{(1-n) \cdot n}{2} = \frac{n^4 - 2n^3 + 3n^2 - 2n}{8}$$

Suma liczb n -tego wiersza wynosi więc

$$\frac{n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n}{8} - \frac{n^4 - 2n^3 + 3n^2 - 2n}{8} = \frac{n^3 + n}{2}$$