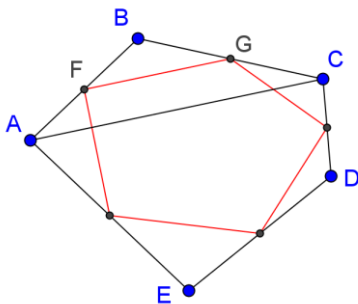




Zestaw 4

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Środki kolejnych boków pięciokąta wypukłego połączono odcinkami i otrzymano łamaną o długości 7,3 cm. Oblicz sumę długości wszystkich przekątnych tego pięciokąta.



Z twierdzenia Talesa wynika, że w trójkącie odcinek łączący środki ramion jest dwa razy krótszy od podstawy. Zastosujmy ten fakt do trójkąta ABC zawartego w naszym pięciokącie. Przekątna AC jest dwa razy dłuższa od odcinka FG . Podobnie wykażemy, że pozostałe przekątne są dwa razy dłuższe od odpowiednich odcinków czerwonej łamanej. Oznacza to, że suma długości przekątnych wynosi 14,6 cm.

2. Wykaż, że $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

Mamy tu do czynienia z tzw. sumą teleskopową:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{n+1}{n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

3. Znajdź resztę z dzielenia przez 11 liczby $5^{1454} + 6^{2709}$

Ręcznie sprawdzamy, że $5^5 \equiv 1 \pmod{11}$, a więc $5^{1450} \equiv 1$. Ponieważ $5^4 \equiv -2$, więc $5^{1454} \equiv -2 \pmod{11}$.

Również ręcznie sprawdzamy, że $6^5 \equiv -1 \pmod{11}$, a więc $6^{2705} \equiv -1$. Ponieważ $6^4 \equiv -2$, więc $6^{2709} \equiv 2$.

Gdy dodamy do siebie te dwie kongruencje stronami okazuje się, że liczba $5^{1454} + 6^{2709}$ jest podzielna przez 11

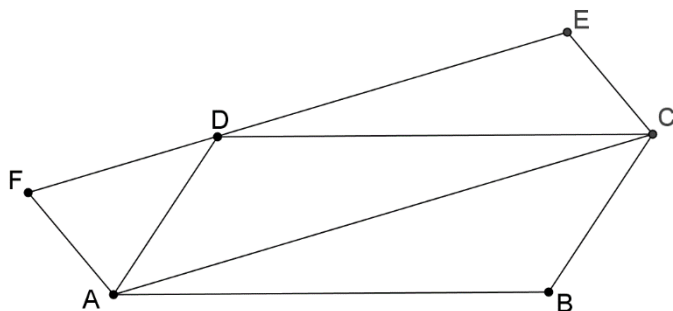
KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Udowodnij, że $\underbrace{22 \dots 2}_n + \underbrace{33 \dots 3}_n^2 = \underbrace{11 \dots 1}_{2n}$

Oznaczmy liczbę $\underbrace{11 \dots 1}_n$ przez x . Wówczas:

$$\begin{aligned} \underbrace{22 \dots 2}_n + \underbrace{33 \dots 3}_n^2 &= 2x + (3x)^2 = 2x + 9x^2 = x(2 + 9x) = \underbrace{11 \dots 1}_n \left(2 + \underbrace{99 \dots 9}_n \right) \\ &= \underbrace{11 \dots 1}_n \cdot \underbrace{100 \dots 1}_n = \underbrace{11 \dots 1}_{2n} \end{aligned}$$

2. Dany jest równoległobok $ABCD$ oraz równoległobok $ACEF$, którego bok EF przechodzi przez punkt D . Udowodnij, że te równoległoboki mają jednakowe pola.



Pole trójkąta ACD stanowi połowę pola zarówno równoległoboku $ABCD$, jak i równoległoboku $ACEF$ (sprawdź to), a to wystarcza, by te równoległoboki miały jednakowe pola.

3. Liczby rzeczywiste a i b spełniają równość

$$\frac{2a}{a+b} + \frac{b}{a-b} = 2$$

Jakie wartości może przyjmować ułamek $\frac{3a-b}{a+5b}$?

Zobaczmy, jaka jest zależność między a i b .

$$\begin{aligned} \frac{2a}{a+b} + \frac{b}{a-b} &= 2 \\ 2a(a-b) + b(a+b) &= 2(a^2 - b^2) \\ 2a^2 - 2ab + ab + b^2 &= 2a^2 - 2b^2 \\ 3b^2 &= ab \\ b &= 0 \quad \text{lub} \quad 3b = a \end{aligned}$$

Jeżeli $b = 0$, to $\frac{3a-b}{a+5b} = \frac{3a}{a} = 3$

Jeżeli $3b = a$, to $\frac{3a-b}{a+5b} = \frac{9b-b}{3b+5b} = \frac{8b}{8b} = 1$